

## ON THE NOISE OF FLUORESCENT LIGHTING INSTALLATIONS

by E. W. VAN HEUVEN

N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Holland

### Summary

In the frequency spectrum of the noise of a fluorescent lamp ballast, "hum" and "rustle" can be distinguished. Hum comprises small even multiples of the mains frequency, at which the dimensions of the ballast are small in comparison with the wavelength of the sound in the air. The noise at these frequencies is, therefore, mainly produced by the ballast acting as a vibration exciter to larger mounting surfaces. Rustle frequencies (about 1000...3000 c/s) are radiated directly by the ballast itself. Hum may be eliminated by use of a core construction where the displacements due to magnetic attraction across the air-gap cancel out the magnetostrictive displacements at the mounting points of the reactor. Rustle radiation must be isolated by putting the ballast in a closed box. A filling for the empty space in these boxes providing acoustical impact sound insulation and good thermal conductivity is described.

### Sommaire

On peut déceler, dans le spectre des fréquences du bruit produit par le régulateur d'une lampe à fluorescence, un «ronflement» et un «bruissement». Le ronflement se compose des petits multiples pairs de la fréquence du réseau, pour lesquels les dimensions du régulateur sont faibles devant la longueur d'onde du son dans l'air. Le bruit à ces fréquences est donc surtout dû au régulateur qui fait entrer en vibration les grandes surfaces du bâti. Les fréquences de bruissement (environ 1000...3000 Hz) sont rayonnées directement par le régulateur lui-même. On peut supprimer le ronflement en employant un type de réalisation du noyau tel que les déplacements produits par l'attraction magnétique dans l'entrefer soient opposés aux déplacements dus à la magnétostriction aux points de fixation de la bobine. On peut empêcher le rayonnement du bruit de bruissement en plaçant le régulateur dans un carter fermé. On indique en quel matériau remplir le restant du carter pour assurer un isolement acoustique aux sons d'impact et avoir une bonne conductibilité thermique.

### Zusammenfassung

Im Geräuschspektrum der Drosselspule einer Leuchtstofflampe lassen sich deutlich „Brumm“- und „Rausch“-Anteile unterscheiden. Das Brummen umfaßt wenige gerade Harmonische der Netzfrequenz, für welche die Dimensionen der Drossel klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Luftschalls sind, so daß der Schall durch Anregung von größeren Montageflächen erzeugt wird. Die Rauschfrequenzen (etwa 1000...3000 Hz) werden direkt von der Drosselspule abgestrahlt. Das Brummen kann durch Verwendung einer Magnetkernkonstruktion vermieden werden, bei der die durch magnetische Kräfte über den Luftspalt erzeugte Deformation gerade durch die zwischen den Montagestellen auftretende magnetostruktive Deformation aufgehoben wird. Die Abstrahlung des Rauschens muß dadurch vermieden werden, daß man die ganze Drosselspule in einen geschlossenen Kasten setzt. Es wird ein Füllmaterial für den Kasten angegeben, das eine gute Schallisolierung und zugleich hohe thermische Leitfähigkeit gewährleistet.

### 1. Introduction

When fluorescent lighting was first introduced some fifteen years ago the problem of the noise produced by the associated ballasts was not taken very seriously. This new lighting technique was used mainly in factories, etc., where the ballast noise was usually imperceptible with the general sound level obtaining.

Gradually, however, the use of this type of lighting was extended to offices, shops and homes. These quieter surroundings made a reduction of the noise below a "satisfactory level" imperative. As a result of competition between the various

makers of fluorescent tube ballasts this "satisfactory level" is gradually being set lower and lower [1].

In this paper a survey will be given of some techniques of noise abatement in fluorescent lamp ballasts, resulting from the research work done on this subject at the N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken.

### 2. Character of the sound

The sources of sound in a fluorescent lighting installation are the ballasts. These contain iron-core inductors, usually with air-gaps in the



magnetic circuits. The magnetic field in an iron core produces mechanical deformations of the latter, both by the action of attraction forces across the air-gap and by magnetostrictive effects. The periodic character of the magnetic field makes these deformations result in vibrations and noise.

The noise as produced by a fluorescent lighting installation is distributed over a large part of the audible frequency range. We shall subdivide it into "hum", "rustle" and (occasionally) "rattle".

Rattle is an indirect consequence of vibrations in fixtures, etc., of which many parts are held together by the force of gravity only. As soon as the peak value of the acceleration amplitude of vibrations in the construction exceeds the gravitational acceleration, those parts may start rattling against each other. Such vibrations are often caused by impacts on the ceiling on which the fixtures are suspended. Older types of ballasts occasionally produced, during operation, rather violent vibrations with the same effect, but with modern ballasts there is little chance of vibrations being excited which come anywhere near the critical level for producing rattle. We shall therefore consider rattle to be outside the scope of this paper.

In the remaining sound two important frequency regions may be discerned, leading to the division into "hum" and "rustle".

Hum concerns the low-frequency region up to a few hundred c/s within which discrete frequencies occur which are even multiples of the mains frequency. In comparison with the wavelength of these tones in the air a normal ballast is so small that, if suspended elastically, it will radiate hum frequencies as a point source in accordance with its total volume displacement. This radiation is negligible in comparison with the sound production obtained if the ballast acts as a vibration exciter to larger surfaces (walls, ceilings, large parts of fixtures, etc.) which, as a consequence of their dimensions not being small in comparison to the wavelength, are capable of radiating the hum noises.

Rustle indicates the sound within a frequency range of about 1 to 3 kc/s where, in the sound analyses, rather surprisingly high intensity levels may be found. Unlike the low frequency vibrations these high rustle frequencies are radiated to an appreciable extent by the ballast itself, as the source is no longer small compared with the wavelength. Moreover, the frequency range of the rustle noise is such that natural mechanical vibrations of the coil construction—

although heavily damped—may add to the irregular character of the phenomenon.

Measurements of the sound radiated by an elastically suspended ballast, such as have been made by MASON and NUTT [2], will reveal only its rustle properties. Only if the dimensions of the reactor are large enough can this method be used to study hum. Large transformers as used in distribution networks of electrical energy have been studied in this way by GORDY [3]. GOULD [4] tried to overcome the difficulty by studying the noise of fluorescent-lamp ballasts when mounted on a rather large fixture, thus assuring at least some hum radiation. We have investigated the problem of hum by studying the low-frequency vibrations of the iron cores of the ballasts since the only effective way to reduce hum and avoid rattle is the reduction of vibration transmission from the ballast to the base on which it is mounted. In addition, rustle frequencies, in so far as they are radiated by the ballasts themselves, must be isolated.

It will be understood that the principal aim of this research was to find measures for noise reduction which can be taken in the manufacture of the ballasts. These measures therefore can only be those of such a nature as will give satisfactory reproducible results without the need of individual acoustic adjustments of the ballasts. (This would become too costly for mass production.)

### 3. Theory of hum reduction

To study the action of a ballast as a vibration exciter, especially at low frequencies, we shall analyse the causes of mechanical vibrations in a magnetic core.

If an iron core, generally comprising an air-gap, is magnetised two deformations occur simultaneously, one *elastic* and the other *magnetostrictive*.

The elastic deformation originates in the force with which the limbs of the iron circuit attract each other across the air-gap. This force  $F$  in newtons is given by

$$F = \frac{10^7 B^2 O}{8\pi} \text{ (N)}, \quad (1)$$

where  $B$  = the magnetic induction in Vs/m<sup>2</sup> and  $O$  = the cross section of the magnetic circuit in m<sup>2</sup>. For an induction  $B$  varying sinusoidally with time:  $B = B_{\max} \sin \omega t$ , and the force  $F$  becomes proportional to  $(1 + \cos 2\omega t)$ . This means that the magnetic attraction varies sinusoidally between zero and twice the average value, with a frequency twice that of the current in the coil.



Hum-frequencies being low in comparison with any natural frequencies of the construction, the momentary deflection pattern and the momentary force will be related in accordance with the static case.

The magnetostrictive properties of the magnetic material cause relative elongations and compressions of the core in the direction of the magnetic flux. The technical aspect of the phenomenon has been studied, amongst others, by FAHNOE [5], LEONARD [6] and WILLIAMS [7]. The characteristic relation between the specific magnetostrictive elongation  $\varepsilon = \Delta L/L$  and the induction  $B$  for ordinary transformer iron is given in Fig. 1. At values of  $B$  up to about 80 % of saturation,  $\varepsilon$  is positive (magnetostrictive elongation) and may be taken as approximately proportional to the energy density of the magnetic flux:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \frac{10^7 B^2}{8 \pi}, \tag{2}$$

where  $\alpha =$  a proportionality factor.

For ordinary transformer iron, depending upon the Si-content and the treatment,  $\alpha$  will be of the order of magnitude  $(1 \text{ to } 3) \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ .

Eq. (2) holds within the range wherein the wrongly directed magnetisations within individual Weiss domains are reversed. At high inductances the magnetisation within Weiss domains changes into less preferred crystallographic directions. This produces a magnetostrictive shortening which soon supersedes the elongation already existing till, at the saturation value,  $\varepsilon$  amounts to about  $-7 \cdot 10^{-6}$ . In normal operation the induction in a core will seldom exceed the range wherein Eq. (2) holds.

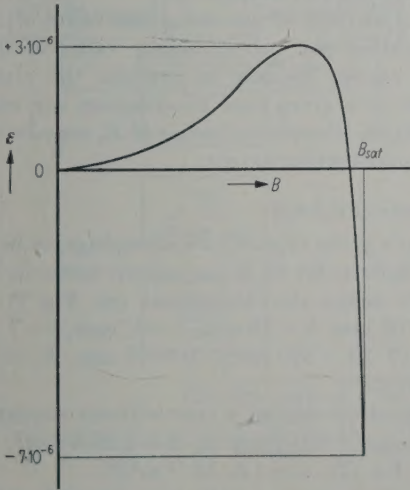


Fig. 1. Characteristic relationship between magnetostrictive elongation  $\varepsilon$  and induction  $B$ .

Eq. (2) indicates that, like the elastic deformation, the magnetostrictive elongations will vary sinusoidally at twice the frequency of the (sinusoidal) coil current. As the magnetic design of inductors generally aims at a uniform flux density, the magnetostrictive deformation pattern will to a first approximation be that of a proportional increase of all dimensions in a plane parallel to the core laminations, without bending effects.

Actually some bending due to magnetostrictive effects is unavoidable, since at the corners of the core the flux density at the inside of the bend will be greater than at the outside. (Cf. STEIN, [8]). As a result, for instance, a normally right angle between the limbs of a magnetic core will be a little more than  $90^\circ$  at the moments of maximum induction. This leads to some bending of the straight parts of the core.

We shall now consider a core construction, a sectional view of which is given in Fig. 2. The air-gap is situated symmetrically at the centre of gravity of the whole. The core is considered to be elastically suspended, so that it may move freely without exerting any external forces. The centre of gravity then remains stationary.

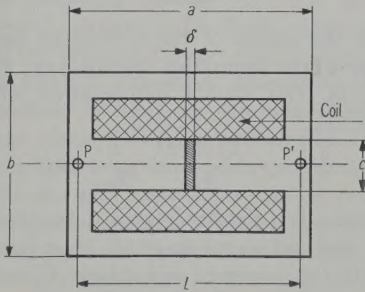


Fig. 2. Sectional view of symmetric core construction.

If the core is magnetised, the magnetostrictive displacement of points along the line  $P-P'$  will increase in an outward direction at both sides of the air-gap, where it is zero, due to the constant specific elongation of the centre limbs (the flux density along which is assumed to be constant).

The elastic displacement of points along  $P-P'$ , on the contrary, is largest in the planes bounding the air-gap, and decreases in outward directions due to the elastic elongation of the centre limbs. As a consequence, somewhere along the line  $P-P'$ , two points exist—symmetrically situated with respect to the air-gap—where the total displacement due to both effects is zero. These points may lie outside the geometrical boundaries of the core. By a proper adjustment of all parameters these points can be made to coincide with the points  $P$  and  $P'$ , where the core can then be



clamped to its mounting device without any vibration being transmitted from the core to the base.

The following symbols will be used:

- $\delta$  (m) = length of air-gap in the direction of the flux,  
 $O$  (m<sup>2</sup>) = cross-section of the iron core at the air-gap,  
 $O'$  (m<sup>2</sup>) = cross-section of the non-magnetic material in the gap ( $O' \leq O$ ),  
 $L$  (m) = distance between the fastening points P and P',  
 $E_c$  (N/m<sup>2</sup>) = Young's modulus of the magnetic iron,  
 $E_g$  (N/m<sup>2</sup>) = Young's modulus of the non-magnetic material in the gap,  
 $R_c$  (N/m) = rigidity of the iron core at the place of the gap, against elastic deformation in the direction of the magnetic flux.

The total rigidity  $R_{tot}$  of the iron core together with the gap filling material, against elastic deformation in the direction of the magnetic flux becomes:

$$R_{tot} = R_c + \frac{E_g O'}{\delta} \quad (\text{N/m}). \quad (3)$$

Under the action of the attractive force between the limbs bounding the air-gap, as given by Eq. (1), the elastic deformation of  $\delta$ ,  $\Delta\delta$ , amounts to:

$$\Delta\delta = -\frac{10^7 B^2 O}{8\pi} \cdot \frac{1}{R_{tot}} \quad (\text{m}). \quad (4)$$

The negative sign indicates a contraction of  $\delta$ . This contraction corresponds to a force  $F_c = -R_c \Delta\delta$  in the iron core and a force  $F_g$  in the gap material ( $F = F_c + F_g$ ). The force  $F_c$  produces an elastic elongation  $(\Delta L)'$  of the centre limbs bounding the air-gap. Supposing  $L \gg \delta$  this elongation is given by:

$$(\Delta L)' = -R_c \Delta\delta \frac{L}{E_c O} \quad (\text{m}). \quad (5)$$

The total elastic elongation of  $L$ ,  $(\Delta L)_{\text{elast.}}$  =  $\Delta\delta + (\Delta L)'$ , hence with Eq. (4) and (5):

$$(\Delta L)_{\text{elast.}} = -\frac{10^7 B^2 O}{8\pi} \left( \frac{1}{R_c + E_g O'/\delta} \right) \left( 1 - \frac{R_c L}{E_c O} \right) \quad (\text{m}). \quad (6)$$

The magnetostrictive elongation of the distance P-P',  $(\Delta L)_{\text{magn.}}$  according to Eq. (2), amounts to:

$$(\Delta L)_{\text{magn.}} = L \alpha \cdot \frac{10^7 B^2}{8\pi} \quad (\text{m}). \quad (7)$$

From (6) and (7) the total elongation  $\Delta L$  of the distance P-P' becomes:

$$\Delta L = \frac{10^7 B^2}{8\pi} \left[ L \alpha - \left( \frac{O}{R_c + E_g O'/\delta} \right) \left( 1 - \frac{R_c L}{E_c O} \right) \right] \quad (\text{m}). \quad (8)$$

There are three important particular cases to be considered:

*Case 1:*  $\delta = 0$  (no air-gap; purely magnetostrictive deformation). From (8), with  $\delta = 0$  we see:

$$(\Delta L)_{\delta=0} = \frac{10^7 B^2}{8\pi} \cdot L \alpha \quad (\text{m}). \quad (9)$$

This formula can be used for determining the magnetostrictive constant  $\alpha$  of the type of core material to be used in the production of the ballasts. A special core is made of the intended shape, but without an air-gap. The deformation of the easily accessible points P and P' is measured as a function of the induction  $B$ , from which  $\alpha$  may be calculated.

*Case 2:*  $E_g = 0$  (no filling material at all in the air-gap). In this case:

$$(\Delta L)_{E_g=0} = \frac{10^7 B^2}{8\pi} \left( L \alpha - \frac{O}{R_c} + \frac{L}{E_c} \right) \quad (\text{m}). \quad (10)$$

With the numerical value of  $\alpha$  known from case 1, and of  $E_c$  as derived from tables of elastic constants, measurements of  $\Delta L$  as a function of  $B$  on a special core without air-gap filling will produce a numerical value of  $R_c$ . The core for this purpose must be identical in shape with the production type, with the filling material in the gap omitted.

*Case 3:*  $\Delta L = 0$  (the ideal production type). In this case Eq. (8) leads to:

$$\frac{E_g O'}{\delta} = \frac{E_c O - L R_c}{\alpha L E_c} - R_c \quad (\text{N/m}). \quad (11)$$

With the numerical values of  $\alpha$  and  $R_c$  as found in the cases 1 and 2 known, the value of  $E_g$  to fulfil the condition of no vibration at P and P' can now be calculated.

The method of assuming the value of  $L$  and calculating the corresponding value of  $E_g$  has been chosen because in practice the clamping points of a given core construction are more or less fixed, whereas the value of  $E_g$  may be varied to a much wider extent.

#### Numerical example

For a given type of core stampings, to be made into ballasts for 40 W fluorescent tubes on 225 V, 50 c/s mains the dimensions (cf. Fig. 2) were:  $a = 108$  mm,  $b = 58$  mm,  $c = 17$  mm,  $\delta = 1.3$  mm,  $O = 17 \cdot 23 = 390$  mm<sup>2</sup>,  $L = 97$  mm,  $E_c = 2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>.

Measurements on a core without air-gap gave  $(\Delta L)_{\text{magn.}} = 0.108 \mu\text{m}$  at  $B = 1.25$  Vs/m<sup>2</sup>, hence with Eq. (2):  $\alpha = 1.8 \cdot 10^{-12}$  m<sup>2</sup>/N.

Similar measurements on a core without filling material in the gap gave  $(\Delta L)_{E_g=0} = -0.096 \mu\text{m}$



at  $B = 1.25 \text{ Vs/m}^2$ , from which, using Eq. (10), we may calculate  $R_c = 4.8 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ .

On inserting these values into Eq. (11) we find that the ideal material to fill the entire gap ( $O' = O$ ) must have a value of Young's modulus  $E_g = 1.4 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ . A choice of the proper filling material for the gap of the intended core can thus be made.

#### 4. Measuring apparatus

The apparatus used for measuring  $\Delta L$  is shown schematically in Fig. 3. A pair of electrodynamic vibration pick-ups of the type "Philips" PR 9261 [9] are used in  $\mu$ -metal boxes for screening against the leakage fields of the ballasts under test.

The moving parts of these vibration pick-ups possess a mass of about 10 g each and are pressed against the iron core with a constant force of about 8 N, thus the maximum measurable acceleration becomes  $800 \text{ m/s}^2$ . By using two pick-ups the constant pressing forces oppose each other. The inductor to be measured is suspended on rubber springs and can thus move freely, the only additional external forces being those exerted by the probes of the vibration pick-ups. The resulting constant compression of the core construction, although sometimes of the same order of magnitude as the measured deformation, is of little importance as the measured sinusoidal variations of the core dimensions are caused only by the alternating magnetisation.

In many cases the pick-ups can touch the core at symmetrically situated points (cf. points P and P' in Fig. 2), which, during operation of the freely suspended coil, perform vibrations of identical amplitudes and phase, in opposite directions. In these cases the voltages of both pick-ups, indicating the velocity amplitudes at the measured points, are identical in phase and amplitude, and may be combined electrically, as shown in Fig. 3, in a network where  $V = 0.5 (V_1 + V_2)$ . This is a special feature to increase the workability of the set-up, since undesired vibrations in the measuring locality cause the suspended coil to act as a pendulum, thus producing identical voltages in opposite phase in the two pick-ups. These are cancelled out in the averaging network, so that the output voltage of this network indicates the velocity amplitude of the "breathing" of the core, with the background disturbances very much reduced. In order to obtain the actual core deformations, this voltage is integrated electrically in the calibration unit PR 9250 [9], [10], and after amplification in a selective amplifier, is fed through one channel of the electronic switch to the cathode-ray oscilloscope (Fig. 3). The selective amplifier consists of two successive stages with negative feedback through R-C filters of the bridged-T type, and passes a narrow band at 100 c/s. The other channel of the electronic switch is used for simultaneously indicating the current in the measured coil. Thus one can see whether an expansion or a contraction occurs at the moments of maximum induction.

In the normal use of a PR 9261 vibration pick-up in conjunction with the calibration unit PR 9250, the amplitude of the measured vibration is found by comparing the amplitude on the oscilloscope with that due to a 50 c/s comparison voltage supplied by, and read on, the calibration unit. Because of the selective amplifier in the circuit, our comparison voltage has to be a 100 c/s voltage, or rather at all times exactly twice the mains frequency because of the steep slopes of the pass band in the selective amplifier. The calibration unit was therefore supplied with a frequency doubler, together with an attenuator so that the actual calibration voltage at 100 c/s was exactly one hundredth of the value indicated on the scale of the instrument.

With the apparatus described a sensitivity of  $3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$  of the vibration amplitude measurements was obtained for symmetrical cores. In non-symmetrical cases, where the voltages of each pick-up must be measured separately, the background disturbances determine the sensitivity. In this case one has to work during very

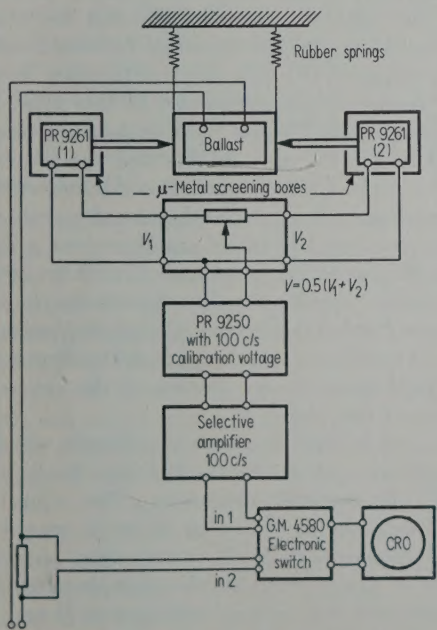


Fig. 3. Schematic arrangement of measuring apparatus.



quiet periods, e. g. at night, to obtain anything like the sensitivity value mentioned above for symmetrical cases.

### 5. Less symmetrical core constructions

The example of treatment for the minimizing of hum vibrations given earlier was simplified in that the shape of the core (Fig. 2) was symmetrical with respect to the line P-P'. Often, for reasons of economy in mass production or otherwise, such a symmetrical design is not feasible. An example of a less symmetrical construction encountered in practice is given in Fig. 4a.

The only line of symmetry in this case is Q-Q' through the central air-gap. If P and P' again be the clamped points we now have to consider separately the components of vibration of P and P' along the line P-P' and perpendicular to this line. In view of the symmetry with respect to Q-Q' the treatment of the vibration components along P-P' is analogous to that described before. Eq. (8) may be used and thus the ideal value of Young's modulus for the filling material in the air-gap may be determined. As would be expected, the value of  $R_c$  proves to be an order of magnitude inferior to that in analogous constructions of the symmetrical type pictured in Fig. 2.

For example an inductance to be used in series with a 40 W fluorescent tube on a 225 V, 50 c/s mains possessed the following dimensions (cf. Fig. 4a):  $a = 108$  mm,  $b = 45$  mm,  $c = 17$  mm,  $\delta = 1.3$  mm,  $L = 97$  mm,  $O = 17 \cdot 23 = 390$  mm<sup>2</sup>,  $E_c = 2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>.

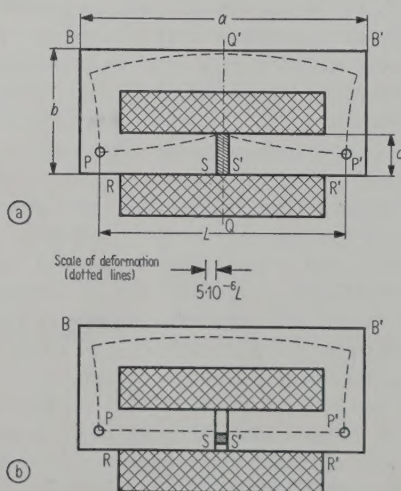


Fig. 4a. (above) Deformation pattern of non-symmetrical core with symmetrical gap-filling.

Fig. 4b. (below) Ditto with non-symmetrical gap-filling.

Measurements on a gapless core gave  $\alpha = 27 \cdot 10^{-13}$  m<sup>2</sup>/N; measurements on a core without gap filling showed a component of  $\Delta L$  along P-P' at  $B = 1.25$  Vs/m<sup>2</sup> of  $-6.6$   $\mu$ m (contraction), from which may be calculated (according to Eq. (10)):  $R_c = 3.4 \cdot 10^7$  N/m.

The correct material to fill the whole cross-section of the air-gap ( $O' = O$ ) must then possess a value of Young's modulus  $E_g = 4.6 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup>.

An inductance equipped with this air-gap filling will still show vibrations of the points P and P' in a direction perpendicular to P-P'. This is to be expected, since the back B-B' of the core will expand due to magnetostriction, whereas the attractive force across the air-gap, apart from a small contraction, will exert mainly a bending torque along B-B'. Bearing in mind that the distance between P and P' will not alter during magnetisation, the centre lines of the core limbs can be expected to be deflected as shown (exaggerated) by the dotted line in Fig. 4a. The shape of this dotted line was derived from measurements on a ballast the coil of which was divided into two parts, one on each of the limbs R-S and R'-S', so that the core was accessible for the vibration pick-up probe near the air-gap, around the sides and at the back. The deformation components were measured at a number of points in two perpendicular directions, with  $B = 1.25$  Vs/m<sup>2</sup> and the resultants drawn in vectorially. The scale of the deformation is also given in Fig. 4.

The shape of the deflection pattern indicates that the distance between P-P' and the centre of gravity of the construction (situated somewhere along Q-Q') will vary, or in other words, for a freely suspended ballast of this type, the clamping points P and P' vibrate perpendicularly to the line P-P', since in this case the centre of gravity of the whole construction remains at rest. Unfortunately, due to the vibrational movements of the core, this centre of gravity is not a fixed point. Moreover, the total mass of such an inductor is about equally distributed between the iron core and the coil, hence any mutual displacement of these two will have an appreciable effect upon the exact momentary position of the centre of gravity of the whole.

The coil in itself is a rather stiff tube which is clamped around the limbs R-S and R'-S' with certain mechanical tolerances. The vibration amplitudes involved are small with regard to these tolerances, and it is therefore purely a matter of chance whether the clamping between core and coil will be most effective at R and R', or S and S', or somewhere in between. As a result



the mutual displacements of coil and iron core, and therefore also the amplitude of the remaining vibrations of P and P' perpendicular to the line P-P' will be unpredictable and, moreover, will vary considerably amongst ballasts in a given production batch.

The shape of the dotted line in Fig. 4a indicates that a possible remedy against mutual displacements of core and coil would be a bending torque, proportional to the acting attractive forces, and applied in such a way that the limbs R-S and R'-S' would stay aligned during deformation. This may be obtained, for instance, by filling the upper half of the air-gap (cf. Fig. 4b) with a material of which  $E_g$  is lower than the calculated value, and the lower half of the gap with a material with a high value of  $E_g$  so that the overall mechanical rigidity of the gap filling is the same as if the whole gap were filled with the correct material to fulfill the condition  $\Delta L = 0$ . Now, however, the seat of the resultant of the reactive force opposing compression of the gap filling will be shifted towards the side where the hardest filling material is located, and this force together with the magnetic attraction, acting in the centre line of the magnetic circuit, may provide the desired bending torque.

By varying the method of gap filling, always fulfilling the condition  $\Delta L = 0$  for vibrations along P-P', it is thus possible to bring the reactive force of the gap filling out of centre to a variable extent, and it is thus even possible to make cores the limbs R-S and R'-S' of which bend outwards during deformation. For a given type of core construction the right combination of materials in the gap, which both makes  $\Delta L = 0$  and keeps the coil limbs aligned, may easily be found by measurements of the deformation pattern (Fig. 4b).

For a ballast where these conditions are fulfilled the coil will not move perpendicularly to the line P-P', no matter where it is clamped. Nevertheless P and P' will still show some perpendicular vibration with respect to the centre of gravity of the whole, due to the unilateral bending of the back B-B' of the magnetic circuit (which still exists, notwithstanding the bending torque). A little over-compensation of the coil movements, to be obtained by making the limbs R-S and R'-S' bend outwards, would appear to be attractive. This, however, again introduces variations due to the small differences in the location of the most effective clamping point for the individual coils in a production run. Therefore a good alignment of the limbs, with constant

results as to the hum properties of the ballast, proved to be acceptable.

## 6. Transformers

A fluorescent-lamp ballast for use on low-voltage mains (110 or 125 V) consists of a step-up transformer with leakage path for the magnetic flux, thus combining, in effect, a transformer and a choke. Occasionally small transformers are used separately. For instance fluorescent lamps of the Philips' type "TL" S, which operate on 225 V mains in series with an incandescent lamp as ballast, require a step-up transformer on 110 or 127 V mains owing to the higher starting voltage needed. In incandescent spotlight installations for shop window lighting step-down transformers are sometimes used of a size comparable with fluorescent lamp ballasts.

Transformers do not possess an air-gap and thus the technique of compensating the elastic and magnetostrictive deformations can not be applied. In operation a transformer core shows only magnetostrictive deformation. To avoid the transmission of vibrations to the mounting surface we can either use a transformer iron with little or no magnetostrictive effect, or brace the transformer exactly at its centre of gravity. Both these measures are, however, impracticable. We must therefore consider the fact that all points that may be used as clamping points vibrate during operation.

Mounting devices that tend towards a freely suspended state of the transformer are out of the question. If they are very supple, so as not to transmit the vibrations, they are unable to hold the transformer firmly in place, which is a basic practical condition in the layout of an installation.

However, if two points exist on the core which can be used as clamping points and which, in a freely suspended state of the transformer, vibrate in the same line with identical amplitudes and phases but in opposite directions, it is possible to design a mechanical device providing a firm fastening of the whole construction whilst preventing the transmission of magnetostrictive vibrations towards the mounting surface.

Two types of fastening members have been developed for this purpose. They are the U-shaped bracket with converging legs and the rectangular U-shaped bracket with hinged legs.

The convergent-U-shaped bracket is pictured schematically in Fig. 5. Only the elastically neutral lines of the legs and the body are drawn. The transformer is supposed to be of the type



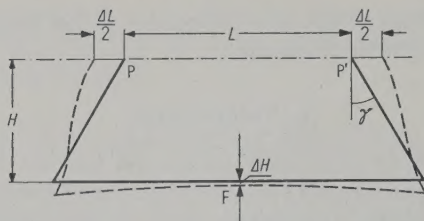


Fig. 5. Sectional view showing deformation of elastically-neutral lines of convergent-U-shaped bracket.

illustrated in Fig. 2 but without an air-gap. The clamping points P and P' are braced by the ends of the legs of two convergent U brackets, one on either side of the iron core. The centres F of the bodies of both brackets are fastened onto the mounting surface.

At the moments of maximum magnetic induction  $B$  the points P and P' are displaced outwards over a distance  $0.5 \Delta L$  each. If the clamping is firm enough the ends of the legs of the brackets will move with the points P and P' and parallel to themselves. The dashed line in Fig. 5 will then indicate schematically, and in an exaggerated way, the shape of the elastically neutral line of the bracket in the deformed position.

Calculation of this elastic deformation leads to the following expression: (12)

$$\frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{\frac{3}{4} (L/H)^2 \cos \gamma + (L/H) \sin \gamma - \sin \gamma \cdot \tan \gamma - (I_1/I_2) \tan \gamma}{4 (L/H) \cos \gamma + 4 \cdot \sin \gamma + I_1/I_2}$$

where

$L$  = the distance between P and P' (m) (cf. Fig. 5)

$H$  = the distance between the line P-P' and the elastically neutral line at the centre F of the body of the bracket (m),

$\Delta L$  and  $\Delta H$  the increases of  $L$  and  $H$ , respectively, during deformation (m),

$\gamma$  = half the angle between the converging limbs,

$I_1$  and  $I_2$  the moments of inertia to bending in the plane of drawing of Fig. 5, resp. of the body and the limbs of the bracket ( $\text{m}^4$ ).

$\Delta H$  may thus be positive or negative. Supposing that the mass of the bracket is negligible compared with that of the transformer, the centre of gravity of the latter, which is halfway between P and P', will also apply to the whole construction. In this case no vibration will be transmitted if the distance between F and the common centre of gravity is invariable, in other words if  $\Delta H = 0$ . By inserting this into Eq. (12) we obtain:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{3}{4} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \frac{\cos^2 \gamma}{\sin \gamma} + \frac{L}{H} \cos \gamma - \sin \gamma \quad (13)$$

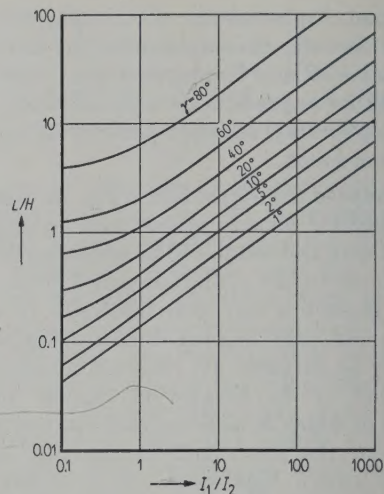


Fig. 6. Graph of values satisfying Eq. (13).

Eq. (13) gives the ratio between the moments of inertia of the body and the limbs of the bracket required for absence of vibration transmission from the transformer to the mounting surface. In Fig. 6 this ratio is plotted graphically against  $L/H$  with  $\gamma$  as parameter. The equation holds if the mechanical resonance frequencies of the construction are high with respect to the vibration frequency concerned (mostly 100 c/s). This can easily be arranged, as only the ratio between the moments of inertia  $I_1$  and  $I_2$  enters into Eq. (13), and not the absolute values. If fairly strong members are used for fastening, whilst still satisfying Eq. (13), it is possible to obtain a construction which is rigid enough for practical use, and of which the lowest natural mechanical resonance frequency is high enough for the suppositions underlying Eq. (13) to be valid. A bracket of this type is pictured in Fig. 7a.

The rectangular bracket with hinged legs is pictured in Fig. 7b. In comparison with Fig. 7a it has a very simple appearance, yet may prove satisfactory as to lack of vibration transmission. Its design is based on the characteristic deformation pattern of a symmetrical transformer core. Both the body and the legs of the bracket are stiffened by flanges, but the corners are intentionally kept supple, so that they can be regarded as hinges in comparison to the stiffened members.

The deformation, as measured at  $B = 1.25 \text{ Vs/m}^2$ , of the transformer core for which the bracket has been developed, is pictured in Fig. 8. The bending of the sides, a reason for which has been given earlier [8], is also shown in the figure.



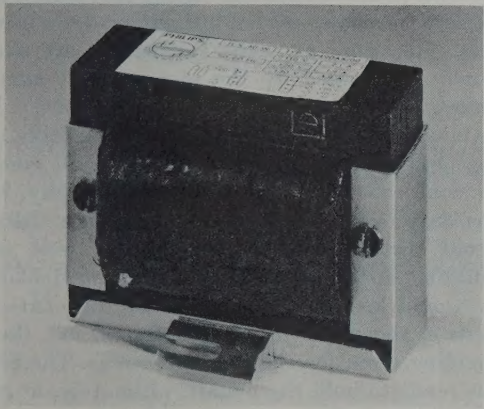
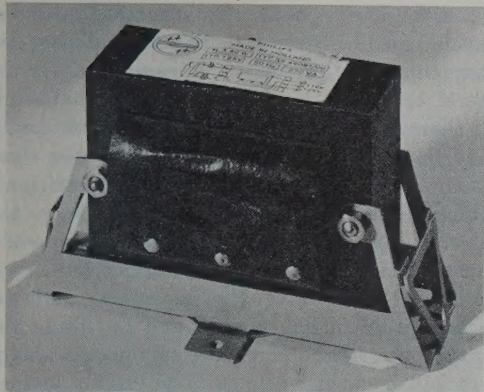


Fig. 7a. (above) Transformer equipped with convergent-U-shaped bracket.  
Fig. 7b. (below) Transformer equipped with bracket with hinged legs.

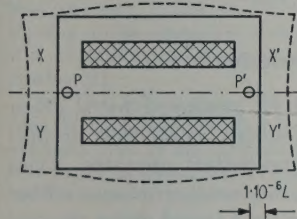


Fig. 8. Sectional view showing deformation pattern of transformer core.

The centre parts of the ends, between X and Y, and X' and Y' respectively, show little bending but move practically parallel to themselves. If the legs of the bracket bracing the core at these places also move parallel to themselves, the body of the bracket will be stretched without bending, so that its centre F remains stationary. This centre is again fastened to the mounting surface. The forces required for stretching the body convey bending torques to the clamped areas of the legs, which will prevent them from moving parallel to themselves unless the fastening is so

tight that the clamped areas of the legs and the core are mechanically a whole. This can be achieved with quite a moderate degree of friction between the parts, as can be shown both by calculation and by experiment.

### 7. Rustle abatement; canned ballasts

We have dealt up to now with measures to be taken against the transmission of vibrations from the ballast to the mounting surface. This is sufficient to eliminate the hum noise of the installation, but not the rustle, i. e. the less important part of the noise, comprising frequencies in the range 1 to 3 kc/s, which are radiated directly as sound by the vibrating core itself.

Rustle originates in the electrical series connection of an iron cored choke with a gaseous discharge. This leads to two phenomena, both resulting in core vibrations at rustle frequencies.

At the moments of re-ignition of the discharge, once each half-cycle of the mains voltage, a pulse excitation occurs which causes damped mechanical oscillations of the core at its natural mechanical resonance frequencies. The lower frequencies of these fall approximately in the range of rustle frequencies referred to. If, in the measuring apparatus, the selective amplifier is replaced by a non-selective pre-amplifier so that the rustle frequencies are passed, damped oscillations will be perceptible on the oscilloscope during about a tenth of a half cycle of the mains frequency. The higher resonance frequencies are damped more heavily, in addition to being excited to a lesser extent owing to the finite width of the pulse.

The other phenomenon can be separated by short-circuiting the starter of a fluorescent lamp, thus leaving a circuit of two fluorescent lamp filaments in series with the ballast and fed from a variable, sinusoidal, mains voltage. At low values of the latter a pure sinusoidal current flows. If the voltage is increased until the peak value of the voltage drop across each filament exceeds a critical value of about 17 V, discharges are set up in the neighbourhood of the filaments and at the same time the ballast starts to rustle. A study of the current reveals that the discharges are random pulses, which are quenched by the shunting effect of the filament bringing down the voltage drop.

In normal operation of the fluorescent tube this phenomenon may also exist, possibly in combination with plasma oscillations. The random pulses of the tube current produce mechanical core vibrations in the same way as do the re-ignition pulses of the main discharge.



It is interesting to note that both rustle phenomena have a recurrent frequency of 100 times per second, one being associated with the re-ignition of the discharge, the other with the peak tube current. An elastically suspended ballast, which can practically only radiate its rustle as sound, may yet be judged to produce "hum". This sensation of the recurrent frequency of the high pitched rustle noise may be another evidence of SCHOUTEN's hypothesis concerning the "residue" in sounds with many spectral components [11], [12], [13].

The strong interaction between tube and ballast in the origin of rustle noise is also apparent when the sound emitted by an elastically suspended ballast is measured [2]. When selecting ballasts for their rustle properties one may compare the sound levels of various ballasts feeding successively the same fluorescent lamp, but an equally wide variety of sound levels are found if different fluorescent lamps are connected successively to the same ballast.

What can the ballast manufacturer do to minimize rustle noise? The special clamping methods and devices employed to overcome hum excitation of the mounting surface do not apply in general, since the phase relationships of the vibrations in the core are substantially different from those at frequencies low with respect to the natural frequencies of the construction.

This is, however, of little concern as it is very difficult to excite vibrations in building constructions at 100 c/s or higher. ELLING [14] found attenuations of some 30 dB at the contact point even when precautions were taken to assure a good contact.

The main concern is, therefore, the isolation of the sound emitted directly. A loose cover over the ballast may have some effect but generally leaves too many leaks to be a real insulator in the acoustical sense of the word. The best thing to do is to put the ballast in a closed box (canned ballasts). The canning of ballasts presents a number of problems, mainly of a thermal nature. There must be a good thermal conductivity from the ballast to the box for dissipating the developed heat without the temperature of the coil becoming too high. Metallic contacts between the ballast and the box must be avoided as the thin metal wall of the latter can be much more easily excited at rustle frequencies than building structures, in which case its acoustical effect would be spoilt. A well-known technique is to have the ballast float in a bituminous filling in the box. Since bitumen is a poor conductor of heat, a mixture of bitumen and sand is often used.

The difficulty is that the bitumen must be pourable for filling the can, at a temperature not detrimental to the electrical insulation. At the normal operation temperature of the ballast it will therefore tend to become rather soft and a really floating ballast will sooner or later come into contact with the wall of the can. Additional materials are therefore required to keep the ballast in its place, but these will increase the acoustic contact between ballast and box.

A good solution of the acoustical and the thermal problem has been found by filling the empty space in the can with corrugated aluminium foil. By choice of a suitable "filling factor" a volume heat conductivity can be procured that equals or surpasses that of bituminous-sand mixtures. Vibrations at rustle frequencies are adequately attenuated by the succession of many contact points between the foils.

At hum-frequencies the core shows places of large and of small amplitudes which all come into contact with the aluminium foil initially. If, thus, large vibrational forces were to be transmitted through the foil to the box and its mounting surface, it is very likely that Hooke's law would be surpassed locally at the contact points of the rather ductile aluminium foil, thus providing room for the core vibrations. The foil thus tends to hold the ballast, ultimately, at its nodal points only.

In this connection, it has occasionally been found that altering the position of a ballast of this type with respect to gravity produces a slight increase of its hum level, which soon dies down to the original value.

### Conclusion

The noise that will be produced by a given ballast is largely dependent upon the circumstances under which the ballast operates. Even the acoustically-best ballasts may produce audible hum if properly placed on a tuned organ pipe or kettledrum. Equally, these same ballasts may be heard to rustle if connected to a fluorescent lamp selected for its high rustle output.

If one wishes to establish a standardized quality indication for noise of fluorescent tube ballasts in the same way as tests on the electrical behaviour have been standardized [15]...[18], one should therefore create standard conditions under which the ballast is operated during the noise test. If these standard conditions comprise an elastic suspension within a box of given volume and acoustic absorption, as for instance in the apparatus used by MASON and NUTT [2], a



sensible indication of rustle may be obtained but the problem remains of defining a fluorescent tube producing a standard rustle. Dummy resistances, as prescribed in the electrical tests of ballasts, are of no use in this connection.

In addition, the vibration transmission at hum frequencies should be measured with the ballast mounted on and loaded by a specified mechanical impedance. Finally, the relative importance of these two data must be decided upon, so as to obtain a single—weighted—combined figure.

The author wishes to acknowledge the work of many colleagues at N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, from the results of which this paper has been compiled.

(Received 27th Sept., 1954.)

#### References

- [1] General Electric, Sound rating for ballasts. *Lighting and Lamps* **59** [1951], May, 60.
- [2] MASON, C. A. and NUTT, D. A., Discharge lamp chokes, methods of production noise testing. *Elect. Rev., Lond.*, **148** [1951], 489.
- [3] GORDY, T. D., Audible noise of power transformers. *Elect. Engng., N. Y.* **69** [1950], 800.
- [4] GOULD, H. R., Fluorescent lamp ballast noise. *Lighting and Lamps* **57** [1950], March, 34.
- [5] FAHNOE, H., A study of sound levels of transformers. *Elect. Engng., N. Y.* **60** [1941], 277.
- [6] LEONARD, S. C., Magnetostriction made visible. *Gen. Elect. Rev.* **45** [1942], 637.
- [7] WILLIAMS, W. D., Magnetostriction phenomena. *Gen. Elect. Rev.* **45** [1942], 161.
- [8] STEIN, G. M., Influence of the core form upon the iron losses of transformers. *Elect. Engng., N.Y.* **67** [1948], 95.
- [9] VAN SANTEN, G. W., Introduction to a study of mechanical vibration. Philips' Tech. Library, Eindhoven 1953, p. 237.
- [10] SEVERS, J., An electrodynamic pick-up. *Philips' tech. Rev.* **5** [1940], 230.
- [11] SCHOUTEN, J. F., The perception of pitch. *Philips' techn. Rev.* **5** [1940], 286.
- [12] SCHOUTEN, J. F., The perception of subjective tones. *Proc. kon. Ned. Akad. Wet.* **41** [1938], 1086.
- [13] SCHOUTEN, J. F., The residue, a new component in subjective sound analysis. *Proc. kon. Ned. Akad. Wet.* **43** [1940], 356.
- [14] ELLING, W., Bestimmung mechanischer Eingangs-impedanzen. *Acustica* **4** [1954], 396.
- [15] Specification for fluorescent-lamp ballasts. *Amer. Stand. C82.1*, April 1953.
- [16] Methods of measurement of fluorescent lamp ballasts. *Amer. Stand. C82.2*, June 1950.
- [17] Specification for fluorescent lamp reference ballasts. *Amer. Stand. C82.3*, June 1950.
- [18] Recommendations for ballasts for fluorescent lamps. *Intern. Electrot. Comm., Tech. Comm. 34 C* (to be published).

#### International Acoustics Congress in U.S.A. — 1956

The Second Congress of the International Commission on Acoustics will be held June 17-24, 1956 in Cambridge, Massachusetts, U.S.A., in conjunction with the Fifty-first Meeting of the Acoustical Society of America. This is one of a series of triennial congresses sponsored by the Commission [1].

The First ICA Congress [2], held in the Netherlands in June of 1953, was attended by some 300 scientists and engineers from 20 different countries. In addition to technical papers and excursions, Congress participants and their families enjoyed sightseeing trips, receptions, and other functions which formed a part of the Congress program.

The Commission extended an invitation to the Acoustical Society of America to organize the 1956 Congress in the United States. The Council of the Society, in turn, proposed that the Congress be held in conjunction with a regular meeting of the Society. In this way, all members of the Society would have an opportunity to participate in the International Congress, and all of the Congress members from other countries would automatically join in a meeting of the Society. The Council selected Cambridge, Massachusetts, as the location for the meetings and designated Professor R. H. BOLT as Chairman of the Organizing Committee.

The central themes of the technical program will be Physical Acoustics and Bioacoustics, with special emphasis on the inter-relations between these fields and on practical applications. Technical sessions will be held at the Massachusetts Institute of Technology and Harvard University. The program will include a number of visits to points of special acoustical interest, as well as entertainments and opportunities for sightseeing.

Detailed plans for the Congress will be announced in special bulletins. If you would like to attend the Congress and wish to receive further information please write to:

Mr. JOHN A. KESSLER, Secretary  
Second ICA Congress  
Acoustics Laboratory  
Massachusetts Institute of Technology  
Cambridge 39, Massachusetts, U.S.A.

- [1] The organization and functions of ICA are reported in *Acustica* **1** [1951], 143 and *J. acoust. Soc. Amer.* **24** [1952], 230.
- [2] A report on the First ICA Congress is given in *J. acoust. Soc. Amer.* **26** [1954], 110 and in *Acustica* **3** [1953], 390. The full proceedings, including all of the papers presented, are reprinted in *Acustica* **4** [1954], no. 1.



# EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN AN SCHWIMMENDEN ESTRICHEN MIT SCHALLBRÜCKEN

von M. HECKL

Mitteilung aus dem akustischen Laboratorium von Prof. CREMER, München

## Zusammenfassung

Nach einer Theorie von L. CREMER sind folgende Größen für die Verbesserung der Trittschalldämmung von schwimmenden Estrichen mit punktförmigen Brücken maßgebend: Die Eigenfrequenz des Systems aus Estrichmasse und federnder Schicht, der Widerstand des Estrichs und der Rohdecke, die Ausbreitungsfunktion im Estrich und die Übertragungsfunktion der Brücke. Es werden Verfahren angegeben, diese Größen zu messen. Hierbei ergab sich der Absolutwert des Widerstandes und die Ausbreitungsfunktion einer 2 m<sup>2</sup> Asphaltplatte in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert für eine unendlich große Platte. Die Rohdecke bestand aus einer Kappendecke mit lose darüber vergossenem Zementglattstrich; deshalb unterschied sich der Widerstand sehr von dem für eine homogene Platte berechneten. Es wurden schwimmende Estriche mit künstlichen Brücken gebaut. Die gemessene Verbesserung stimmte gut mit der nach der obigen Theorie vorausgerechneten überein, wenn man den tatsächlich gemessenen Widerstand der Rohdecke einsetzt.

## Summary

According to a theory of L. CREMER the following factors are important for the insulation against air-borne sound of floating floors with sound-bridges: the natural frequency of the system floating floor and resilient layer, the resistance of the floor and covering, the propagation function in the floor and the transmission function of the supports. Methods of measuring these factors are given and, as example of the consonance between the theory (for an infinite floor) and practice, the measured values of resistance and propagation function in a 2 m<sup>2</sup> asphalt floor are quoted. The measured improvement in floating floors constructed with special supports also agrees with theory when the resistance of the covering is included.

## Sommaire

D'après une théorie de L. CREMER, les quantités importantes en ce qui concerne l'amélioration, au point de vue amortissement du bruit des pas, des carrelages flottants avec ponts acoustiques pontiformes, sont les suivantes: la fréquence propre du système composé de la masse du carrelage et de la couche élastique, la résistance du carrelage et du gros œuvre du plafond, la fonction propagation dans le carrelage et la fonction propagation des ponts acoustiques. On indique des procédés de mesure de ces quantités. On a trouvé alors que la valeur absolue de la résistance et la fonction propagation d'une plaque d'asphalte ayant 2 m<sup>2</sup> sont en bon accord avec les valeurs théoriques relatives à une plaque indéfinie. Le gros œuvre du plancher se composait d'une chape, sur laquelle avait été coulé un enduit lisse de ciment n'adhérant pas; c'est pourquoi la résistance était très différente de celle qui a été calculée pour une plaque homogène. On a construit des carrelages flottants, avec ponts acoustiques artificiels. L'amélioration mesurée cadre bien avec celle calculée à partir de la théorie ci-dessus, si on y introduit la résistance effectivement mesurée du gros œuvre du plafond.

## 1. Theorie

Für die Verbesserung  $\Delta L$  der Trittschalldämmung durch schwimmende Estriche mit punktförmigen Brücken hat L. CREMER [1] folgenden Ausdruck abgeleitet:

$$\Delta L = 10 \log \frac{1}{(f_1 \bar{f})^4 + |Z_2 H / Z_0 N|^2} \quad (1)$$

Dabei bedeuten  $f$  die jeweilige Frequenz,  $f_1$  die Eigenfrequenz des Systems Estrichmasse gegen Federwirkung der Zwischenschicht,  $Z_0$  den BiegeWelleneingangswiderstand des Estrichs,  $Z_2$  den Eingangswiderstand der Rohdecke,  $H$  die Ausbreitungsfunktion für BiegeWellen im Estrich und  $N$  den im wesentlichen durch die Brücke

bestimmten Übertragungsfaktor, der folgendermaßen definiert ist [1]:

$$N = \frac{v_0}{v_2} = \frac{1}{v_2} \left( v_1 + \frac{F_1}{Z_0} \right) \quad (2)$$

mit  $v_0$  = Schnelle des Estrichs am Brückenort, wenn keine Brücke vorhanden wäre,  $v_1$  = Schnelle der Brücke an dem dem Estrich zugewandten Ende,  $v_2$  = Schnelle der Brücke an dem der Rohdecke zugewandten Ende und  $F_1$  = von der Brücke auf den Estrich zurückwirkende Kraft.

Für einen zu Longitudinalschwingungen angeregten Stab mit der Dichte  $\rho_1$ , der Fläche  $A_1$  und der Elastizität  $E_1$ , dessen Länge  $h_1$  klein ist gegen



die Wellenlänge, wird in der obengenannten Arbeit folgender Ausdruck angegeben:

$$N = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0}\right) + i \left(\frac{A_1 \varrho_1}{Z_0} + \frac{Z_2}{A_1 E_1}\right) \omega h_1. \quad (3)$$

Für den weiteren Spezialfall einer sehr weichen Brücke kann man in Gl. (2) das zweite Glied vernachlässigen, da in diesem Falle die rückwirkende Kraft sehr klein ist. Es gilt also:

$$N \approx v_1/v_2. \quad (4)$$

Diese Annäherung erweist sich insofern als sinnvoll, als sie einen häufig auftretenden Fall wiedergibt, und weil dieser Quotient, den wir im folgenden mit

$$A_{12} = v_1/v_2 \quad (4a)$$

bezeichnen wollen, nur mit seinem Absolutbetrag in Gl. (1) eingeht und dieser relativ einfach zu messen ist. Wollte man  $N$  genau messen, so müßte man auch die Phasenbeziehungen zwischen  $v_1$  und  $F_1$  erfassen, was meßtechnisch einige Schwierigkeiten bereitet.

Für die in den meisten Fällen verwendete Anregung über eine Masse  $m$  (Hammermasse) ist in Gl. (1) deren Widerstand zu berücksichtigen. Hierzu ist  $Z_0$  in Gl. (1) zu ersetzen durch  $Z_0 + i\omega m$ . Der zweite Summand im Nenner ist also zu multiplizieren mit  $Z_0^2/(Z_0^2 + \omega^2 m^2)$ . Dasselbe gilt aber auch für den ersten Summanden, der zu dem über die elastische Schicht tretenden Energieanteil gehört [2]. Wir erhalten somit ein additives Glied und aus Gl. (1) wird:

$$\begin{aligned} \Delta L = 10 \log \frac{1}{(f_1/f)^4 + |Z_2 \Pi/Z_0 N|^2} + \\ + 10 \log \frac{Z_0^2 + \omega^2 m^2}{Z_0^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Mit dieser Formel werden die in dieser Arbeit angeführten Meßergebnisse verglichen werden. Doch dazu ist es erst nötig, die Größen  $f_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_0$ ,  $\Pi$  und  $N$  zu kennen.

## 2. Meßobjekte

Die verwendete Rohdecke hatte eine Fläche von 10 m<sup>2</sup> und eine Dicke von ca. 25 cm. Sie bestand aus einer Kappendecke, die nachträglich mit einem Zementglattstrich von ca. 3 cm versehen wurde. Leider war die Verbindung zwischen Kappendecke und Glattstrich sehr lose und auch ziemlich ortsabhängig. Da aber in Gl. (5) nur der Eingangswiderstand der Rohdecke eingeht, führt dieser Mangel zu keiner Verfälschung der Meßergebnisse, wenn man die Brücke nur an den Stellen der Rohdecke aufsetzt, deren Eingangswiderstand bekannt ist.

Als Estrich wurde eine Asphaltplatte von 2 m<sup>2</sup> Fläche und einer Dicke von  $h_0 = 2,1$  cm verwendet. Durch Messungen an einem Probestab aus einem möglichst gleichartigen Material wurden nach dem von R. SCHMIDT entwickelten Verfahren [3] folgende Materialkonstanten bestimmt:

Dichte $\varrho_0$	= 2,3 g/cm <sup>3</sup> ,
Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{Lo}$	= 2,2 · 10 <sup>5</sup> cm/s,
Verlustfaktor $\eta$	= 0,1 (bei 6 °C).

Der Zwischenraum zwischen Estrich und Rohdecke wurde mit Glaswolle ausgefüllt, d. h. mit einem Material, dessen Anteil an der resultierenden Federung gegenüber dem der eingeschlossenen Luft nahezu vernachlässigt werden kann [4].

Man kann also  $f_1$  berechnen nach der Formel:

$$f_1 = 600/\sqrt{Gd}, \quad (6)$$

wobei  $G$  das Flächengewicht des Estrichs in kg/m<sup>2</sup> und  $d$  den Abstand Estrich-Rohdecke in cm bedeuten.

## 3. Messung der Eingangswiderstände

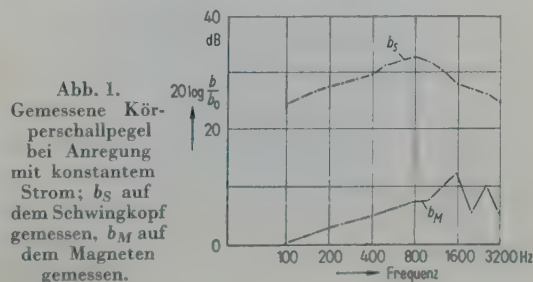
Zur Messung der Eingangswiderstände diente ein Körperschallsender, der aus einem Permanentmagneten der Masse  $m_M = 10\,500$  g und einer Schwingspule auf einem Aluminiumkopf der Masse  $m = 580$  g bestand. Um den Frequenzgang der Apparatur aufzunehmen, wurde der Magnet und der Schwingkopf auf eine sehr weiche Unterlage gestellt.

Fließt ein Strom  $I$  durch die Schwingspule, dann wirkt auf den Aluminiumkopf und auf den Magneten eine entgegengesetzte gleiche Kraft.

$$F = \alpha I = m b_S = m_M b_M \quad (7)$$

( $b_S$  = Beschleunigung der Schwingspule,  $b_M$  = Beschleunigung des Magneten).

In Abb. 1 sind die mit dem Körperschallabtaster gemessenen Werte von  $20 \log(b_M/b_0)$  und  $20 \log(b_S/b_0)$  ( $b_0$  = willkürlicher Bezugswert) aufgetragen. Wie man sieht, ist der Abstand der beiden Kurven bis ca. 800 Hz konstant





und zwar ist entsprechend Gl. (7)

$$20 \log \frac{b_s}{b_M} = 20 \log \frac{m_M}{m} = 25 \text{ dB.} \quad (8)$$

Über 800 Hz ist der Abstand nicht mehr gleich, weil hier bereits Eigenschwingungen des Magneten auftreten; das heißt also, daß der Magnet nicht mehr als starrer Körper anzusehen ist. Daß gleicher Strom nicht zu gleichen Körperschallpegeln führt, dürfte auf einen Frequenzgang des Beschleunigungsabtasters zurückzuführen sein. Für diese Annahme spricht auch, daß man, hält man nach Abb. 2 ein Kondensatormikrophon unmittelbar über die Schwingspule, bis 3000 Hz nahezu eine konstante Druckanzeige erhält (Abb. 3). Dieser Druck aber dürfte bei der vorliegenden Anordnung zum überwiegenden Teil von den Beschleunigungen der Luft in dem Zwischenraum herrühren, die radial gerichtet sind und radial zum Rande wachsen. Der Abstand betrug hierbei etwa nur 3 mm, ist also sicher klein zur Wellenlänge. Aus dem gleichen Grunde dürften auch am Ringspalt, dessen

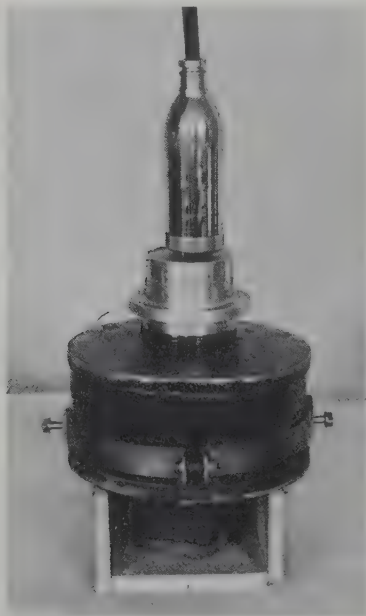


Abb. 2. Anordnung zur Messung des Schalldrucks über dem Schwingkopf.

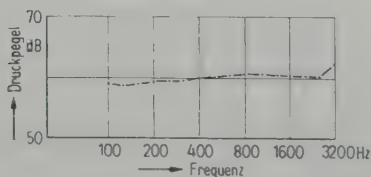


Abb. 3. Schalldruck über dem Schwingkopf bei Anregung mit konstantem Strom.

Durchmesser 3,9 cm betrug, die Trägheitsanteile die Strahlung bei weitem überwiegen. Es ist daher anzunehmen, daß der gemessene Druck unmittelbar ein Maß für die Beschleunigung der Schwingspule ist, und die Feststellung, daß dieser Druck konstant ist, läßt auch auf ein konstantes  $\alpha$  und ein Verhalten der Schwingspule als träge Masse schließen. Zumindest dürften Änderungen von  $\alpha$ , die an sich durch Änderungen der Form des Magnetfeldes möglich sind, von so geringer Bedeutung sein, daß ihre Berücksichtigung für bauakustische Messungen nicht lohnen würde.

Da der Eingangswiderstand definiert ist als

$$Z = F/v_P = i \omega F/b_P \quad (9)$$

( $F$  = erregende Kraft,  $v_P$  = Geschwindigkeit,  $b_P$  = Beschleunigung der Platte), und man bei einem über alle Frequenzen konstanten Strom die Kraft als konstant ansetzen kann, erhält man:

$$Z = i \omega \text{ const}/b_P. \quad (10)$$

Die Bestimmung der Konstanten erfolgt aus Gl. (7):

$$\text{const} = m_M b'_M \quad (11)$$

( $b'_M$  = Beschleunigung des Magneten unter 800 Hz). Also wird aus Gl. (10):

$$Z = i \omega m_M b'_M/b_P. \quad (12)$$

Zur Messung ist es also nur nötig, bei konstantem Strom den Körperschallabtaster einmal auf die Platte und bei einer Frequenz unter 800 Hz auf den Magneten aufzusetzen und die erhaltenen Werte entsprechend dem in Abb. 1 aufgetragenen Frequenzgang zu korrigieren. Es ist dabei nicht notwendig, den Absolutbetrag der Beschleunigung und der Konstante  $\alpha$  zu kennen.

Weit einfacher wird die Messung unter 800 Hz, wenn die Gleichung

$$F = m_M b_M \quad (13)$$

noch voll gültig ist. Setzt man Gl. (13) in Gl. (9) ein, so erhält man:

$$Z = i \omega m_M \frac{b_M}{b_P}. \quad (14)$$

Man braucht also nur die Pegelunterschiede auf dem Magneten und auf der Platte zu messen und erhält daraus direkt den gesuchten Wert. Im Prinzip vergleicht man den Widerstand der Masse des Magneten mit dem Widerstand der Decke.

Da es nicht möglich war, die Phasenbeziehungen von  $b_P$  und  $b_M$  zu messen, wurden in Abb. 4 nur die Absolutbeträge der Widerstände eingezeichnet. Messung a stellt den Eingangswiderstand der oben beschriebenen Asphaltplatte dar. Gestrichelt ist der theoretische Wert für eine unendlich große Platte eingetragen, der sich aus dem Widerstand der Platte [2]



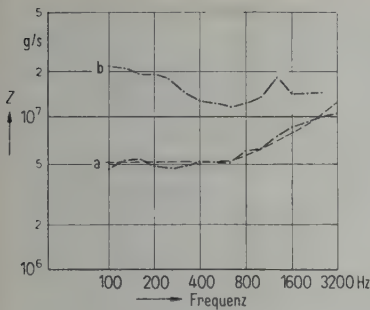


Abb. 4.  
(a) Eingangswiderstand einer Asphaltplatte (gestrichelt: theoretische Werte);  
(b) Eingangswiderstand einer Rohdecke.

$$Z = 2,3 c_{Lo} \varrho_0 h_0^2 \quad (15)$$

und dem Widerstand  $i\omega m$  der erregenden Schwingspule zusammensetzt:

$$|Z| = \sqrt{2,3^2 c_{Lo}^2 \varrho_0^2 h_0^4 + \omega^2 m^2}. \quad (16)$$

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung sehr gut, wenn man die oben angegebenen Werte für  $c_{Lo}$ ,  $\varrho_0$  und  $h_0$  einsetzt, besonders wenn man berücksichtigt, daß die Platte nur 2 m<sup>2</sup> groß war. Aber wegen der hohen inneren Dämpfung von Asphalt dürfte zumindest am Anregungsort die direkte Welle die reflektierten weit überwiegen. Die Streuungen in Abhängigkeit vom Anregungsort waren sehr klein, so daß man annehmen kann, daß die angegebenen Werte für die ganze Platte gültig sind. Messung b stellt den Widerstand der Rohdecke dar. Hier treten große Unterschiede von den nach Gl. (16) berechneten Werten auf; dies dürfte aber mit der obenerwähnten ungenügenden Verbindung zwischen Kappendecke und Zementestrich zusammenhängen. Nimmt man an, daß nur der Glattestrich erregt wurde, so erhält man einen den Messungen entsprechenden Wert von  $Z_2$ . Ob diese Annahme zu Recht besteht, ist für das weitere belanglos, denn es wurde immer mit den tatsächlich gemessenen Werten von  $Z_2$  gerechnet.

4. Ausbreitungsfunktion im Estrich

Zur Messung der Ausbreitungsfunktion  $\Pi$  wurde der Estrich mit dem Körperschallsender angeregt und einmal direkt am Anregungsort und dann in verschiedenen Entfernungen die Beschleunigung gemessen. Die so erhaltenen Werte sind in Abb. 5 aufgetragen. Gestrichelt wurden die Werte eingezeichnet, die man für eine unendlich große Platte zu erwarten hätte [3].

$$\Pi(\bar{k}r) = H_0^{(2)}(\bar{k}r) - H_0^{(2)}(-i\bar{k}r) \quad (17)$$

$H$  = Hankelsche Funktion,  $\bar{k}$  = komplexe Wellenzahl,  $r$  = Abstand vom Anregungsort. Wie man sieht, kann man noch für Abstände bis zu 70 cm die Asphaltplatte angenähert als unendlich ausgedehnt betrachten.

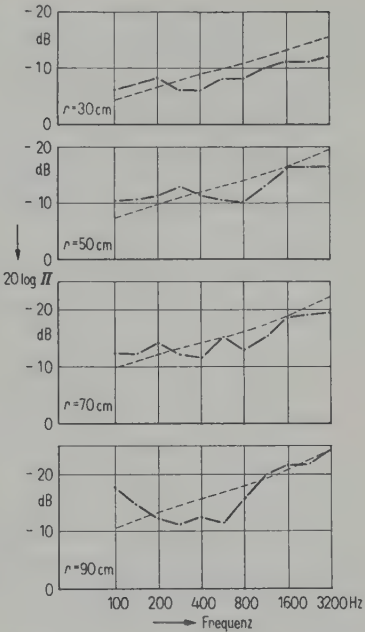


Abb. 5.  
Ausbreitungsfunktion der Asphaltplatte (gestrichelt: theoretische Werte).

5. Übertragungsfaktor der Brücke

Für stabförmige Brücken interessieren die Größen  $A_1$ ,  $\varrho_1$ ,  $h_1$  und  $E_1$ . Die ersten drei sind leicht zu bestimmen, zur Messung von  $E_1$  wurde folgendes Verfahren angewandt (Abb. 6). Auf den Schwingkopf der Masse  $m$  wird die zu untersuchende Brücke und darauf die Masse  $M$  geklebt. Der Sender wird mit reinen Tönen (Kraft  $F_0$ ) angeregt und auf  $M$  wird die Beschleunigung gemessen. Dann ist:

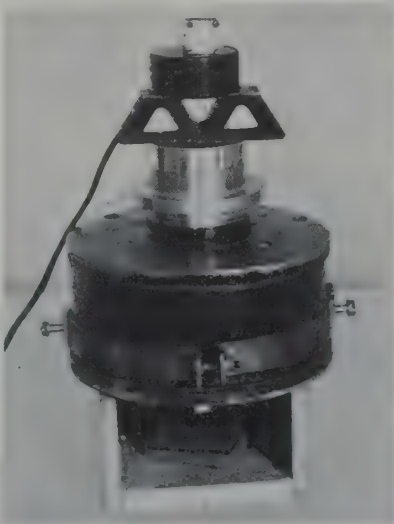


Abb. 6. Anordnung zur Messung des Elastizitätsmoduls der Brücke.



$$F_0 - F_1 = i \omega m v_1, \quad (18)$$

$$v_1 = v_2 + i \frac{\omega h_1}{E_1 A_1} F_2, \quad (19)$$

$$F_1 = F_2 + i \omega \varrho_1 A_1 h_1 v_2, \quad F_2 = i \omega M v_2 \quad (20), (21)$$

( $F_1, v_1$  sind Kraft und Schnelle am Anfang,  $F_2, v_2$  sind Kraft und Schnelle am Ende der Brücke).  
Aus Gl. (18) und (21) erhält man:

$$v_2 = \frac{F_0}{i \omega (m + M + A_1 h_1 \varrho_1 - \omega^2 m M h_1 / E_1 A_1)}. \quad (22)$$

Daraus erhält man für die Resonanzfrequenz:

$$\omega_R^2 = \frac{E_1 A_1}{m M h_1} (m + M + A_1 h_1 \varrho_1) \quad (23)$$

und für  $E$ :  $E_1 = \frac{\omega_R^2 m M h_1}{A_1 (m + M + A_1 h_1 \varrho_1)}. \quad (24)$

Für die später verwendete Korkbrücke ergab sich z. B.  $E_1 = 1,3 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}^2$ .

Die für schallweiche Brücken maßgebende Größe  $A_{12}$  wurde folgendermaßen bestimmt (Abb. 7):  $A_{12}$  hängt von den Brückeneigenschaften und von  $Z_2$ , nicht aber von  $Z_0$  ab. Man setzt also die Brücke auf die Rohdecke, auf die später der Estrich gebracht werden soll, auf und regt die Brücke mit dem Körperschallsender an. Dann mißt man einmal die Beschleunigung am oberen Ende der Brücke  $b_A$  und dann am unteren Ende  $b_E$ . Da

$$A_{12} = v_A/v_E = b_A/b_E \quad (25)$$

ist, hat man damit bereits den gesuchten Wert. In Abb. 8 sind einige so gemessene Werte  $|A_{12}|$  aufgetragen. Die untersuchten Brücken waren:

1. ein Gummi-Element (Abb. 9),
2. eine sogenannte Bügelbrücke aus Eisen (Abb. 9),
3. eine Korkbrücke.

Beim Gummi-Element ist deutlich die erste Eigenresonanz zu erkennen, die nach anderen Messungen etwas über 800 Hz liegen mußte. Bei der Bügelbrücke liegen die Verhältnisse kompli-

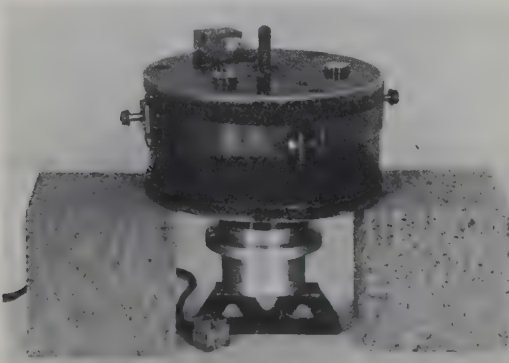


Abb. 7. Anordnung zur Messung des Faktors  $A_{12}$ .

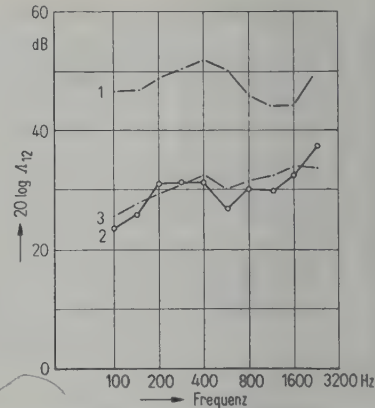


Abb. 8.  
Meßwerte des  
Faktors  $A_{12}$  für  
einige Brücken;  
(1) Gummi-Brücke,  
(2) Bügelbrücke,  
(3) Korkbrücke.



Abb. 9. Gummi-Element und Bügelbrücke.

zierter. Auf jeden Fall ist  $A_{12}$  viel kleiner, als nach dem statisch bestimmten Elastizitätsmodul des Bügels zu erwarten wäre. Wahrscheinlich erfolgt die Übertragung durch Biegeschwingungen des Eisenbügels.

## 6. Messungen an schwimmenden Estrichen mit künstlichen Brücken

An der Stelle, an der die Brücke angebracht werden sollte, wurden erst der Eingangswiderstand und der Trittschallpegel der Rohdecke bestimmt. Dann wurden die Brücke und der Estrich aufgesetzt und der Zwischenraum mit Glaswolle angefüllt, so daß der Abstand Estrich-Rohdecke konstant war. Da es sich gezeigt hatte, daß die Verbindung der Brücke nach beiden Seiten hin von großem Einfluß ist, wurde die Brücke oben und unten angeklebt. Zur Anregung diente teils das normale Hammerwerk, teils der Körperschallsender.

Bei dieser Gelegenheit wurde auch versucht, bei der Rohdeckenmessung einen Absolutvergleich der beiden Anregungsarten durchzuführen. Dieser Vergleich beruht darauf, daß, wächst der Widerstand der Decke weniger stark mit der Frequenz an als der Widerstand der auffallenden Masse, dies physikalisch damit gleichbedeutend ist, daß die Masse mit der Decke fest verbunden ist und auf die Masse eine dem Stoß entsprechende Kraft wirkt. Im vorliegenden Fall ist

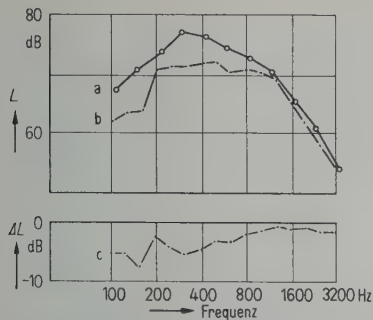


Abb. 10. Trittschallpegel bei Anregung mit dem Hammerwerk und mit dem Körperschallsender. Meßwerte auf gleiche Kraft und Bandbreite korrigiert.  
(a) Hammerwerk,  
(b) Körperschallsender,  
(c) Differenz.

der Widerstand der Decke einigermaßen konstant und die Masse des Schwingkopfes und des Fallhammers sind annähernd gleich; obige Voraussetzungen sind also sicher erfüllt.

Abb. 10 zeigt die gemessenen Trittschallpegel bei Anregung mit dem Hammerwerk, wenn man die Werte auf eine Bandbreite von 75 Hz korrigiert. Außerdem zeigt sie auch die Trittschallpegel, die man erhält, wenn man die Decke mit dem Körperschallerreger mit einer sinusförmigen Wechselkraft von  $1,7 \cdot 10^7$  dyn anregt. Diesen Wert erhält man, wenn man das vom Hammerwerk erzeugte Kraftspektrum berechnet und die Energien innerhalb des oben angegebenen Bereichs summiert unter der Annahme, daß die einzelnen Teiltöne inkohärent sind. In Abb. 10 wurde auch der Unterschied der beiden Anregungsarten angegeben, für dessen Frequenzgang Th. LANGE [5] einen ähnlichen Verlauf erhält. Wenn man berücksichtigt, daß es sich hier um eine Absolutmessung unter ziemlich undefinierten Voraussetzungen (Lagerreibung des Hammerwerkes und dergleichen) handelt, ist die erhaltene mittlere Abweichung von 2,8 dB als gering zu bezeichnen. Für Relativmessungen ist dieser Unterschied natürlich zu groß. Es wurden daher für die Verbesserung nur die Werte gleicher Anregungsart herangezogen.

Abb. 11 zeigt die Verbesserung bei Vorhandensein einer Eisenbrücke von  $h_1 = 1,1$  cm und  $A_1 = 16$  cm<sup>2</sup> in verschiedenen Abständen von der Anregungsstelle. Gestrichelt ist die nach Gl. (5) gerechnete Verbesserung eingetragen, wenn man die gemessenen Werte für  $Z_0$ ,  $Z_2$ ,  $N$  und die gerechneten Werte von  $H$  zugrunde legt. Der für  $r = 0$  ersichtliche Anstieg von  $\Delta L$  für hohe Frequenzen kommt nicht von einer Federwirkung der Brücke, sondern vom Eingangswiderstand der vorgeschalteten Masse  $m$  (zweites Glied in

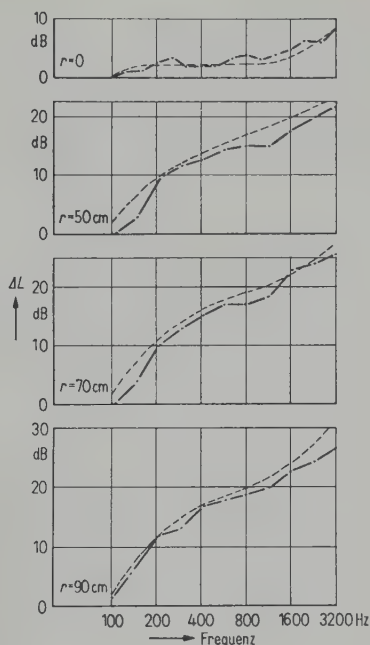


Abb. 11. Verbesserung bei Vorhandensein einer Eisenbrücke in verschiedenen Abständen vom Anregungsort (gestrichelt = theoretische Werte).

Gl. (5)). Die verwendete Brücke wirkt also als vollkommen starre Verbindung. Da man aus diesen Messungen schließen kann, daß die Entfernungsabhängigkeit in der Formel richtig erfaßt wurde, wurden die folgenden Messungen nur mehr direkt an der Anregungsstelle vorgenommen.

In Abb. 12 ist die gemessene Verbesserung als ausgezogene Kurve eingetragen. Als Brücke wurde ein stabförmiges Korkstück mit folgenden Daten verwendet:  $A_1 = 20$  cm<sup>2</sup>,  $h_1 = 1,9$  cm,  $\rho_1 = 0,2$  g/cm<sup>3</sup>,  $E_1 = 1,3 \cdot 10^8$  dyn/cm<sup>2</sup>. Die gestrichelte Kurve stellt die Verbesserung dar, die man erhält, wenn man die obigen Daten in Gl. (3)

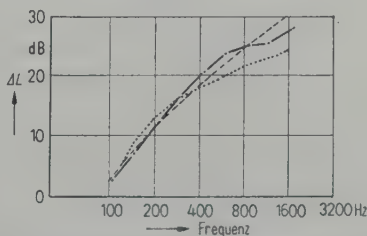


Abb. 12. Verbesserung bei Vorhandensein einer Korkbrücke;

— nach Gl. (5) und (3) berechnete Werte für eine kurze, stabförmige Brücke;  
..... nach Gl. (5) und (4a) berechnete Werte unter Zugrundelegung der gemessenen Werte von  $A_{12}$ ;  
— gemessene Werte.



und (5) einsetzt. Außerdem ist in die Abb. 12 punktiert die Verbesserung eingetragen, die sich ergibt, wenn man in Gl. (5) und (4a) die in Abb. 8 aufgetragenen Werte von  $\Lambda_{12}$  für Kork einsetzt. Wie man sieht, sind die drei Kurven einigermaßen gleich, nur die aus  $\Lambda_{12}$  berechnete punktierte Kurve liegt erwartungsgemäß etwas niedriger, weil in diesem Fall die auf den Estrich zurückwirkende Kraft vernachlässigt wird.

Wie man außerdem aus Abb. 12 ersieht, zeigt die vorliegende Brücke bei tiefen Frequenzen keine Wirkung, weil hier die Schallenergie hauptsächlich durch die elastische Schicht tritt, auf der der Estrich schwimmt. Man erhält die normale Verbesserung:

$$\Delta L = 40 \log(f/f_1). \quad (26)$$

Erst bei höheren Frequenzen macht sich der Einfluß der Brücke bemerkbar; die Verbesserung steigt nicht mehr so stark an, weil die Brücke als Federung wirkt. Wie man aus Gl. (3) und (5) schließen kann, gilt für höhere Frequenzen:

$$\Delta L = 20 \log af \quad (27)$$

( $a$  ist eine bestimmte Konstante).

Abb. 13 und 14 zeigen die Verbesserungen beim Vorhandensein des Gummi-Elementes bzw. der Bügelbrücke. Die ausgezogenen Kurven bedeuten wieder die gemessenen und die gestrichelten Kurven die nach Gl. (3) und (5) berechneten Werte, wenn man für das Gummi-Element den nach Gl. (24) berechneten Elastizitätsmodul  $E_1 =$

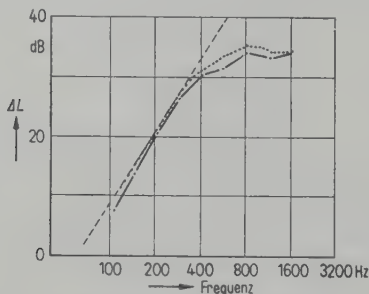


Abb. 13. Verbesserung bei Vorhandensein einer Gummi-  
brücke (Bedeutung der Kurven siehe Abb. 12).

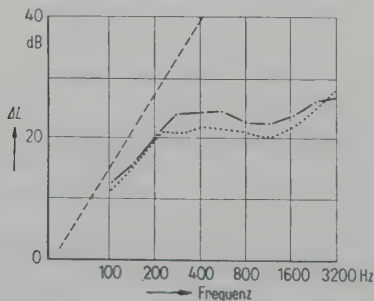


Abb. 14. Verbesserung bei Vorhandensein einer Bügel-  
brücke (Bedeutung der Kurven siehe Abb. 12).

$1,1 \cdot 10^7 \text{ dyn/cm}^2$  einsetzt. Bei der Bügelbrücke war diese Messung nicht möglich, deshalb wurde  $E_1$  aus der statischen Durchbiegung bestimmt. In beiden Fällen unterscheiden sich die gemessenen und so gerechneten Werte von  $\Delta L$  ganz erheblich. Das hat verschiedene Ursachen: Wie schon erwähnt, ist für das Gummi-Element die Voraussetzung, daß die Länge  $h_1$  klein ist gegen die Wellenlänge, nicht mehr erfüllt, weil schon bei 800 Hz die erste Eigenresonanz auftritt. Daß in diesem Frequenzgebiet die Verbesserung nicht noch weiter absinkt, dürfte auf die hohe innere Dämpfung von Gummi zurückzuführen sein. Bei der Bügelbrücke hängt die Verbesserung überhaupt nicht mehr mit dem statisch bestimmten Elastizitätsmodul zusammen, denn ähnlich wie ein dünner Blechstreifen, hat der Eisenbügel schon bei tiefen Frequenzen (90 Hz) Eigenresonanzen und leitet deshalb die Schwingungen in Form von Biegewellen sehr gut von der Estrichplatte auf die Rohdecke.

Bei der Messung von  $\Lambda_{12}$  und der daraus bestimmten Verbesserung (punktierte Kurve) werden diese Einflüsse mit erfaßt. Daher unterscheiden sich in diesem Fall die gerechneten und gemessenen Werte nur wenig. Die Vernachlässigung der Rückwirkung der Brücke bedeutet bei diesen sehr weichen Brücken keinen großen Unterschied, denn je weicher die Brücke ist, um so kleiner ist auch die auf den Estrich zurückwirkende Kraft. Für den allgemeinen Frequenzgang der Verbesserung gilt auch bei diesen beiden Brücken das oben Gesagte: Wenig Einfluß der Brücke bei tiefen Frequenzen, große Verschlechterung bei den höheren.

Die vorstehenden Untersuchungen wurden im Auftrage und mit Mitteln des Bundes-Ministeriums für Wohnungsbau durchgeführt.

Herrn Professor Dr. L. CREMER bin ich für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und seine zahlreichen wertvollen Ratschläge bei ihrer Durchführung zu großem Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 25. August 1954.)

#### Schrifttum

- [1] CREMER, L., *Acustica* **4** [1954], 273.
- [2] CREMER, L., *Acustica* **3** [1953], 317.
- [3] SCHMIDT, R., *Ing. Arch.* **5** [1934], 352.
- [4] GÖSELE, K. und BACH, W., Mitteilung des Instituts für Technische Physik, Stuttgart.
- [5] LANGE, Th., *Acustica* **3** [1953], 161.  
Siehe auch:
- [6] ELLING, W., *Acustica* **4** [1954], 396.
- [7] CREMER, H. und L., *Frequenz* **2** [1948], 61.
- [8] GÖSELE, K., Über die Wirkungen von schwimmenden Estrichen (unveröffentlicht).
- [9] MEYER, E., PARKIN, P. H., OBERST, H. und PURKIS, H. J., *Acustica* **1** [1951], 18.

# ZUR THEORIE ALLGEMEINER, SCHWACH GEKOPPELTER AKUSTISCHER RESONATOREN

von E. CHRISTIAN

Institut für Theoretische Physik der Universität Graz

## Zusammenfassung

Im Sinne der Anwendung von Näherungsverfahren auf allgemein nicht lösbare Randwertprobleme der Elastizitätstheorie wird eine Störungsrechnung erster Ordnung auf ein schwach gekoppeltes verlustfreies akustisches Resonatorensystem angewandt. Im allgemeinsten Fall handelt es sich um  $n$  Resonatoren, die durch  $\binom{n}{2}$  Koppelglieder (die teils weggelassen können) energetisch verbunden sind. Außer der Frequenzaufspaltung infolge der Verstimmung durch die Koppelräume wird sie durch Volumendeformation berechnet. Bei beliebiger Gestalt der Begrenzungsflächen des Systems wird für diese ein fester bzw. freier Rand vorgeschrieben. Schwächere Randbedingungen und einschränkende Bedingungen bezüglich des Schwingungstyps werden im Rahmen von gesonderten Betrachtungen berücksichtigt. Neben schwacher Kopplung der Resonatoren durch die Koppelräume und einer gemeinsamen Eigenfrequenz der Einzelresonatoren im Ausgangszustand setzt die Rechnung keine wesentlichen Einschränkungen voraus. Die Koppelfrequenzen ergeben sich als Lösungen einer Säkulardeterminante, deren Elemente durch Energierterme gebildet sind. Als Spezialfall wird ein System mit schubspannungsfreiem Medium behandelt. Der funktionelle Zusammenhang der Kopplungsparameter eines Zweiresonatorensystems mit den Resonanzerscheinungen wird klargestellt und abgeleitet. Schließlich werden einige praktische Beispiele durchgerechnet.

## Summary

A perturbation calculation of the first order is made on a weakly coupled loss-free system of resonators. Beside the spread of frequency due to mistuning by coupling, that due to volume deformation is also reckoned. For given boundary conditions rigid or flexible walls are prescribed. More and less restricted conditions with respect to the mode of vibration are considered. In respect of weak coupling through the cavity and general values of the frequencies of the individual resonators, the calculation makes no special restriction. The coupling frequencies emerge as solutions of a secular determinant of which the elements are made up of energy terms. As special case a medium free of shear is considered. The functional relationship of the coupling parameter of a double resonator is derived. Finally some practical examples are given.

## Sommaire

Pour appliquer un procédé d'approximation à la résolution de problèmes de la théorie de l'élasticité relatifs aux valeurs aux parois et qui ne sont généralement pas solubles, on effectue un calcul de perturbations du premier ordre sur un système de résonateurs acoustiques sans pertes et faiblement couplés. Le cas le plus général est celui de  $n$  résonateurs reliés énergétiquement par  $\binom{n}{2}$  éléments de couplage (dont une partie peut manquer). On calcule la multiplication de la fréquence produite par le désaccord dû aux cavités de couplage et celle provenant de la déformation en volume. On attribue au système, dont les surfaces limites ont une forme quelconque, une paroi rigide ou une paroi libre. On traite des cas particuliers où les conditions aux limites sont moins sévères et moins limitatives quant au mode d'oscillation. Le calcul ne comporte aucune restriction importante, en dehors de la condition de couplage lâche des résonateurs par les cavités de couplage et de fréquence propre commune à tous les résonateurs. Cas particulier d'un système avec milieu exempt de contraintes de cisaillement. Relation fonctionnelle entre les paramètres de couplage d'un système à deux résonateurs et les phénomènes de résonance. Quelques exemples pratiques.

## 1. Einleitung

Das vorliegende Problem der Elastizitätstheorie ist zu den stehenden Schwingungen, im Gegensatz zu den in unendlichen Medien sich ausbreitenden Wellen, einzuordnen.

Zur rechnerischen Erfassung beliebiger Schwingungen eines allgemeinen akustischen Resonatorensystems ist eine strenge Integration der elastischen Gleichungen unter Berücksichtigung

des Randverhaltens der Feldvektoren an den Begrenzungsflächen des aus Resonatoren und Koppelräumen bestehenden Gesamtraumes durchzuführen. Diese Integration ist aber nur für geometrisch besonders einfache Hüllflächen (Röhre, dünner Stab, Kreisring, Platte usw.) möglich.

Die klassischen Arbeiten über gekoppelte Schwingungen von  $n$  elastischen Resonatoren gehen im wesentlichen auf Lord RAYLEIGH [1] zurück. Auch die Arbeit von WIEN [2] über die



Rückwirkung eines Resonators ist in diesem Zusammenhang erwähnenswert. In einer zusammenfassenden Darstellung über gekoppelte Resonatoren faßt BACKHAUS [3]  $n$  mit einander gekoppelte Einzelsysteme als ein System mit  $n$  Freiheitsgraden auf.

Von GIEBE und BLECHSCHMIDT [4] wurde eine spezielle Kopplungstheorie für ein zylindrisches Einresonatorensystem entwickelt. Von der Kopplungsgleichung ausgehend, wurde von den Verfassern eine Kopplung der radialen und axialen Eigenschwingung angenommen. Sie konnten ihre Rechnung allerdings nur für Hohlzylinder geringer Wandstärke experimentell bestätigen, während sich für Vollzylinder keine Übereinstimmung mit der Theorie ergab.

Eine formale Analogie zur Theorie der elektrischen Doppelleitung stellt die akustische Leitungstheorie dar. Sie ist für Widerstandsbestimmungen, im Zusammenhang mit Anpassungsfragen und Kopplungsproblemen, besonders aber zur Erfassung der Meßgrößen des Schallfeldes von besonderer Bedeutung. In der Folge wird daher kurz auf die Meßgrößen der akustischen Leitung eingegangen, um den später sich als notwendig erweisenden Übergang zu den Feldgrößen der Theorie elastischer Schwingungen zu finden.

Wird ein akustisches Leitungselement (Stab, Trichter, Hohlleiter usw.) durch eine Eingangs- und Ausgangsfläche charakterisiert, so stellt es den Typ des akustischen Vierpols dar. Der Abschluß des Vierpols ist in zwei Extremfällen besonders bedeutungsvoll:

- a) der schallharte Abschluß (Schallschnelle verschwindet),
- b) der schallweiche Abschluß (Schalldruck verschwindet).

Diesen Extremfällen entspricht der akustische Eingangswiderstand bei Leerlauf bzw. bei Kurzschluß.

Die den elektrischen Leitungsgrößen Wechselspannung und Wechselstrom entsprechenden Größen sind Schallwechseldruck und Schallschnelle. Der Betrag der Impedanz ist gleich dem Verhältnis von Druck und Schnelleamplitude. Die Phase der Impedanz ist die Phasendifferenz von Druck und Schnelle. Ist der Druck an der Begrenzungsfläche konstant (Rohrleiter), so läßt sich die Impedanz zweckmäßiger aus Druck und Schallfluß definieren. So ist die Schnelle in einem luftgefüllten Rohrleiter als konstant anzusehen (ebene Welle) und sinkt nur in der Reibungszone der Wand auf Null. In diesem Fall ist der Fluß dem Produkt Querschnitt mal Schnelle im Rohrzentrum gleichzusetzen. Im Falle einer unendlich

langen Rohrleitung stellt das Verhältnis Druck zu Schnelle den Schallwellenwiderstand dar.

## 2. Der homogene akustische Leiter

Da sich der Hauptteil der Arbeit auf verlustfreie Schwingungen eines elastischen Systems bezieht, sollen auch in diesem leitungstheoretischen Teil nur verlustfreie Energieleitungen berücksichtigt werden. Die homogene akustische Leitung stellt die Analogie zu dem symmetrischen elektrischen Vierpol dar. Sie wird als verlustfrei bezeichnet bei verschwindendem Widerstandsanteil  $R$  und bei Verschwinden der Ableitung  $G$ . Es verbleiben demnach nur die rein imaginären Widerstandsanteile. Diese Voraussetzungen treffen etwa bei einem mit reibungs- und schubspannungsfreiem Medium ausgefüllten Metallrohr von konstantem Querschnitt und genügender Wandstärke zu. Die Schwingungsgrößen der akustischen Leitung sind der Schalldruck  $Q$  und der Schallfluß  $J$ . Als weitere wichtige Meßgröße wird der Wellenwiderstand  $Z$  eingeführt. Für die Schwingungsgrößen gilt die Beziehung:

$$\partial/\partial t = j\omega \quad (2,1)$$

Für den Wellenwiderstand  $Z$  gilt:

$$Z = \sqrt{\bar{R}_L \bar{R}_C}, \quad Z = \sqrt{\bar{R}_M \bar{R}_E}, \quad (2,2)$$

wobei mit  $\bar{R}_M$  der Massenwiderstand und mit  $\bar{R}_E$  der elastische Widerstand bezeichnet wird. Das Fortpflanzungsmaß  $g$  wird dargestellt durch:

$$g = a + jb = \sqrt{\bar{R}_L/\bar{R}_C}, \quad g = \sqrt{\bar{R}_M/\bar{R}_E}. \quad (2,3)$$

Wegen der vorausgesetzten Verlustfreiheit verschwindet das Dämpfungsmaß  $a$ . Mit  $b$  wird das die Phasenverschiebung bestimmende Winkelmaß bezeichnet. Die Schwingungsgrößen ergeben sich für eine beliebige Stelle  $x$  der Leitung nach der akustischen Vierpoltheorie als:

$$Q_x = Q_a \cosh gx - J_a Z \sinh gx, \quad (2,4)$$

$$J_x = J_a \cosh gx - \frac{Q_a}{Z} \sinh gx. \quad (2,5)$$

Die Indizes  $a$  weisen darauf hin, daß es sich bei diesen Größen um die Anfangsbedingungen handelt, wobei für die Stelle mit dem belastenden Widerstand  $Q_a/J_a$  die Koordinate  $x = 0$  gesetzt wird. Für die dämpfungsfreie Leitung ergibt sich weiter:

$$Q_x = Q_a \cos bx - j J_a \sin bx, \quad (2,4')$$

$$J_x = J_a \cos bx - j \frac{Q_a}{Z} \sin bx. \quad (2,5')$$

Die Transformationsgleichung der Impedanz lautet für eine beliebige Stelle  $x$  der Leitung:

$$R_x = \frac{Q_x}{J_x} = \frac{\bar{R}_a - j Z \operatorname{tg} b x}{1 - (\bar{R}_a / Z) \cdot \operatorname{tg} b x}. \quad (2,6)$$

An Hand dieser Beziehung läßt sich durch Hinzuschalten eines definierten Vierpols ein Widerstand  $\bar{R}_a$  in den Widerstand  $\bar{R}_x$  transformieren. Mit Hilfe eines Vierpols kann die Messung von Impedanzen für verschiedene Schichtdicken bei vorgegebener Frequenz oder bei vorgegebener Schichtdicke für verschiedene Frequenzen durchgeführt werden.

### 3. Grundlagen, Rand- und Zusatzbedingungen

Die Entwicklung einer allgemeinen Theorie schwach gekoppelter akustischer Resonatoren setzt einige Ergebnisse der Elastizitätstheorie voraus. Effekte, bei denen die Schallabsorption eine Rolle spielt, bleiben unberücksichtigt. Den Ausgangspunkt bildet die für sehr kleine Verdrängungen eines homogenen und isotropen Körpers gültige elastische Grundgleichung:

$$\varrho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{P}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3,1)$$

Verwendete Bezeichnungen:

$\varrho$	= Dichte im Ruhezustand,
$\lambda, \mu$	= LAMÉsche Konstanten,
$\omega = 2\pi f$	= Kreisfrequenz,
$\vec{s} = (u_1, u_2, u_3)$	= Vektor der elastischen Verschiebung,
$S$	= Deformationstensor,
$P$	= Spannungstensor,
$\operatorname{div} \vec{P}$	= Vektordivergenz $P$ ,
$\operatorname{div} P$	= skalare Divergenz $P$ ,
$G$	= Gradiententensor.

Das Medium selbst wird durch die beiden LAMÉschen Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$  charakterisiert. Der Spannungstensor hat die Gestalt:

$$P = 2\mu S + \lambda \operatorname{div} \vec{s} E. \quad (3,2)$$

Die Vektordivergenz des Spannungstensors  $P$  lautet:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \mu \Delta \vec{s} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s}. \quad (3,3)$$

Bei Berücksichtigung der Synchronitätsbedingung

$$\vec{s}' = \vec{s} f(t) = \vec{s} e^{j\omega t} \quad (3,4)$$

für den Verschiebungsvektor, gewinnt die elastische Grundgleichung (3,1) die zweckmäßige Gestalt:

$$-\varrho \omega^2 \vec{s} = \mu \Delta \vec{s} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s}. \quad (3,5)$$

An Randbedingungen, die sich sowohl auf Resonatoren als auch auf Koppellemente der Konfiguration beziehen können, werden vorgeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} \vec{s} &= 0 \\ (\vec{s}, n) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für den festen Rand,} \quad (3,6)$$

$$(P, n) = 0 \quad (3,7)$$

$$\left. \begin{aligned} (P, n) &= 0 \\ (Pn, n) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für den freien Rand.} \quad (3,7a)$$

Die schwächeren Forderungen (3,6a) und (3,7a) sind nur bei einer Spezialisierung auf schubspannungsfreie Medien zulässig. Eine Hinzunahme von Zusatzbedingungen kommt einer Einschränkung der allgemeinen Lösungsmannigfaltigkeit gleich. Oft sind es allerdings derartige Zusatzbedingungen, die die Lösung als physikalisch besonders sinnvoll erscheinen lassen.

Als Zusatzbedingungen sollen berücksichtigt werden:

#### a) Einschränkung der Bedingungen bezüglich des Feldverlaufs in den Resonatoren

Derartige Zusatzbedingungen kommen einer Spezialisierung des Schwingungstyps gleich. Wird: 1.  $\operatorname{div} \vec{s} = 0$  gesetzt, so erhält die Grundgleichung die einfache Gestalt:

$$\varrho \cdot \partial^2 \vec{s} / \partial t^2 = \mu \Delta \vec{s}. \quad (3,8)$$

Die Lösungen der Gleichung (3,8) bezeichnet man wegen des Fehlens jeglicher Kompression als Scherungswellen.

2.  $\operatorname{rot} \vec{s} = 0$  gesetzt, so ist der Verschiebungsvektor als Gradient eines skalaren Potentials darstellbar:

$$\operatorname{rot} \vec{s} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (3,9)$$

Die Grundgleichung läßt sich in eine Wellengleichung

$$\varrho \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 = (2\mu + \lambda) \Delta \varphi \quad (3,10)$$

des Potentials  $\varphi$  überführen. Sie vereinfacht sich mit  $\mu = 0$  für ideale Flüssigkeiten und Gase noch weiter auf:

$$\varrho \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 = \lambda \Delta \varphi. \quad (3,10a)$$

#### b) Stetigkeitsbedingungen für geschichtete Medien

Die zweite Gruppe der Zusatzbedingungen sind Stetigkeitsbedingungen für die Grenzflächen zwischen zwei verschiedenen Medien. Ausführliche Betrachtungen über Reflexion und Brechung an ebenen Grenzflächen wurden von SCHOCH [5] angestellt. Die drei Fällen:

1. zwei schubspannungsfreie Medien,
  2. festes und schubspannungsfreies Medium und
  3. zwei feste Medien grenzen aneinander
- entsprechenden Stetigkeitsbedingungen lauten:



$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left. \begin{aligned} (P_1 n, n) &= (P_2 n, n) \\ (\tilde{s}_1, n) &= (\tilde{s}_2, n) \end{aligned} \right\} & (3,11a) \\
 2. \quad & \left. \begin{aligned} (P_1, n) &= (P_2, n) \\ (\tilde{s}_1, n) &= (\tilde{s}_2, n) \end{aligned} \right\} & (3,11b) \\
 3. \quad & \left. \begin{aligned} P_1 n &= P_2 n \\ \tilde{s}_1 &= \tilde{s}_2 \end{aligned} \right\} & (3,11c)
 \end{aligned}$$

Wendet man das Prinzip von actio und reactio an [6], so kann gezeigt werden, dass die Steitigkeitsbedingungen dem Energieprinzip genügen.

#### 4. Allgemeine störungstheoretische Entwicklung

Zur Berechnung der Koppelfrequenzen eines allgemeinen, schwach gekoppelten  $n$ -Resonatorsystems wird eine Störungsrechnung erster Art angewendet.

Die durch  $\binom{n}{2}$  Koppelglieder verbundenen  $n$  Resonatoren sollen im entkoppelten Zustand mindestens eine gemeinsame Frequenz besitzen. Die Einzelresonatoren seien  $R_v$  mit  $v = 1, 2, \dots, n$ , während die Koppelglieder mit  $R_{rs}$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ ;  $s = 1, 2, \dots, (n-1)$ , bezeichnet werden. Das Medium des Systems sei reibungsfrei, fest und isotrop. Die Ausgangsfrequenz  $\omega_0$  wird von den Eigenfrequenzen der Koppelräume genügend weit entfernt angenommen. Im Ausgangszustand sind die Resonatoren entkoppelt. Ein stetiger Frequenzübergang von  $\omega_0$  zu  $\bar{\omega}_v$  wird sodann durch das Öffnen von in den Koppelflächen  $K_{rs}$  angebrachten Blenden bewerkstelligt. Die Frequenzen  $\bar{\omega}_v$  sind demnach Eigenwerte der Feldverteilung des Gesamtraumes vom Volumen  $V_\Sigma$  im Endzustand. Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$V_v$  = Volumen des  $v$ -ten Einzelresonators,  
 $V_{rs}$  = Volumen des  $rs$ -ten Koppelraumes,  
 $F_v$  = Fläche des  $v$ -ten Resonators,  
 $F_{rs}$  = Fläche des  $rs$ -ten Koppelraumes,

$R_\Sigma = \sum_{v=1}^n R_v + \sum_{C[r,s]} R_{rs}$  = Gesamttraum, bestehend aus den Resonatoren und den Koppelräumen  $R_{rs}$ ,  
 $V_\Sigma = \sum_{v=1}^n V_v + \sum_{C[r,s]} V_{rs}$  = Gesamtvolumen des Systems,  
 $F_\Sigma = \sum_{v=1}^n F_v + \sum_{C[r,s]} F_{rs}$  = Oberfläche des Gesamtsystems.

Das Koppelglied  $R_{rs}$  stellt das Verbindungsstück zwischen  $R_r$  und  $R_s$  dar. Die Eigenwertgleichung des Systems ist sodann von der allgemeinen Gestalt:

$$f(\lambda, \mu, \omega, p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (4,1)$$

Neben dem Eigenwertspektrum enthält sie implizit die Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  sowie die Gestaltungsparameter  $p_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$ . Es wird weiter

von Vorteil sein, auch für den ungestörten Zustand einen geringen energetischen Kontakt innerhalb des Gesamtsystems vorauszusetzen. Diese Voraussetzungen genügen bereits, um das Problem erfolgreich störungstheoretisch behandeln zu können. Im Ausgangszustand handelt es sich um eine  $n$ -fache Entartung, denn es fallen die  $n$  Eigenfunktionen  $\tilde{s}_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , jeweils nur mit der Feldverteilung des  $v$ -ten Resonators zusammen, während sie in allen anderen den Betrag Null haben.

Die  $n$  Eigenfunktionen gehen im Sinne der Störungsrechnung nicht stetig in jene der gestörten Feldverteilung über. Dies gilt aber für eine den  $\tilde{s}_v$  zugeordnete lineare Schar

$$\tilde{s}_k = \sum_{v=1}^n \alpha_{kv} \tilde{s}_v, \quad (4,2)$$

sobald man die Koeffizienten  $\alpha_{kv}$  geeignet bestimmt. Sowohl den ungestörten als auch den gestörten Feldverlauf drücken wir durch die in beiden Fällen gültige elastische Grundgleichung aus. Es gilt daher:

$$-\omega^2 \rho \tilde{s}_k = \overrightarrow{\text{div}} P_k, \quad (4,3)$$

$$-\omega^2 \rho \tilde{s}'_k = \overrightarrow{\text{div}} P'_k. \quad (4,4)$$

Für die variierte Feldgröße wird gesetzt:

$$\tilde{s}'_k = \tilde{s}_k + \delta \tilde{s}_k. \quad (4,5)$$

Weiter kann man im Sinne einer Störungsrechnung erster Ordnung setzen:

$$\omega = \omega_0 + \delta \omega, \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2 \omega_0 \delta \omega, \quad (4,6)$$

$$P'_k = P_k + \delta P_k \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4,7)$$

Die Indizes  $k$  beziehen sich auf die dazugehörige Eigenfunktion  $\tilde{s}_k$ . Aus den Gleichungen (4,3) und (4,4) erhält man nach Einführung der variierten Größen:

$$\overrightarrow{\text{div}} \delta P'_k + \omega_0^2 \rho \delta \tilde{s}_k = -2 \omega_0 \delta \omega \rho \tilde{s}'_k. \quad (4,8)$$

Multipliziert man die letzte Gleichung der Reihe nach skalar mit den Divergenzen der  $n$  Spannungstensoren, so folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)} \overrightarrow{\text{div}} \delta P_k + \omega_0^2 \rho \delta \tilde{s}_k \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)} \\
 = -2 \omega_0 \delta \omega \tilde{s}'_k \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}.
 \end{aligned} \quad (4,9)$$

Es seien  $\tilde{s}_v^{(Z)}$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) die Eigenfunktionen eines energetisch abgeschlossenen Systems, jeweils gebildet aus dem Resonator  $R_v$  und den unmittelbar angrenzenden Koppelgliedern  $R_s$ , ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ). Die den Eigenfunktionen  $\tilde{s}_v^{(Z)}$  entsprechenden Tensoren werden mit  $P_v^{(Z)}$ ,  $G_v^{(Z)}$ ,  $S_v^{(Z)}$  bezeichnet.

Für das Teilsystem  $R_v + \sum_{s=1}^{(n-1)} R_s$  lautet die Grundgleichung:

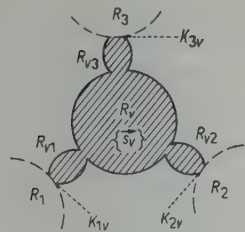


Abb. 1.  
Abgeschlossenes System  
 $R_v + \sum_{s=1}^{(n-1)} R_{vs}$ ,  
eingeführt zur Definition der  
Eigenfunktionen  $\hat{s}_v^{(Z)}$ .

$$\overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)} + \omega_0^2 \varrho \hat{s}_v^{(Z)} = 0, \quad (4,10)$$

während für die variierten Größen gilt:

$$\hat{s}_v^{(Z)} = \hat{s}_v + \delta \hat{s}_v^{(Z)}, \quad \omega_0^2 = \omega_0^2 + 2 \omega_0 \delta \omega.$$

Damit erhalten wir aus Gl. (4,10) das Gleichungssystem:

$$\overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)} = -\omega_0^2 \varrho \hat{s}_v^{(Z)} - 2 \omega_0 \delta \omega \varrho \hat{s}_v^{(Z)}. \quad (4,11)$$

Multipliziert man Gl. (4,11) jeweils mit  $\overrightarrow{\text{div}} \delta P_k$  skalar, so erhält man im Zusammenhang mit Gl. (4,10) bei Vernachlässigung von Gliedern die klein sind von höherer Ordnung, das aus  $n^2$  Gleichungen bestehende System:

$$\omega_0^2 \varrho (\delta \hat{s}_k, \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}) = -2 \omega_0 \delta \omega \varrho (\hat{s}_k, \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}) + \omega_0^2 \varrho (\hat{s}_v^{(Z)}, \overrightarrow{\text{div}} \delta P_k). \quad (4,12)$$

Durch Verwendung der Identität:

$$\text{div } P \hat{s} = (\hat{s}, \overrightarrow{\text{div}} P) + P G \quad (4,13)$$

erhält man weiter:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \varrho (\text{div } P_v^{(Z)} \delta \hat{s}_k - P_v^{(Z)} \delta G_k) \\ = 2 \omega_0 \delta \omega \varrho (\hat{s}_k', \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}) + \\ + \omega_0^2 \varrho (\text{div } \delta P_k \hat{s}_v^{(Z)} - \delta P_k G_v^{(Z)}). \end{aligned} \quad (4,14)$$

Nach Integration über das Gesamtvolumen unter Ausschluß der Koppelräume, erhält man bei gleichzeitiger Anwendung des Gaußschen Satzes:

$$\begin{aligned} 2 \omega_0 \delta \omega \varrho \int_{V_\Sigma - \sum_{C[r,s]} V_{rs}} (\hat{s}_k', \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}) d\tau + \\ + \omega_0^2 \varrho \int_{V_\Sigma - \sum_{C[r,s]} V_{rs}} (\delta P_k G_v^{(Z)} - P_v^{(Z)} G_v^{(Z)}) d\tau \\ = \omega_0^2 \varrho \oint_{F_\Sigma} (\delta P_k \hat{s}_v^{(Z)}, n - P_v^{(Z)} \delta \hat{s}_k, n) df + \\ + \omega_0^2 \varrho \sum_{C[r,s]} \oint_{F_{rs}} (\delta P_k \hat{s}_v^{(Z)}, n - P_v^{(Z)} \delta \hat{s}_k, n) df. \end{aligned} \quad (4,15)$$

Die letzte Gleichung läßt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen (3,6), bzw. (3,7) nach einfacher Rechnung weiter vereinfachen auf:

$$\begin{aligned} \sum_{C[r,s]} \oint_{F_{rs}} [(\delta P_k \hat{s}_v^{(Z)}, n) - (P_v^{(Z)} \delta \hat{s}_k, n)] df \\ = 2 \frac{\delta \omega}{\omega_0} \int_{V_\Sigma - \sum_{C[r,s]} V_{rs}} (\hat{s}_k', \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}) d\tau. \end{aligned} \quad (4,16)$$

In dieser Gleichung sollen nun durch weitere Umformungen sämtliche gestörten Feldgrößen eliminiert werden. So erhält man bei Berücksichtigung der gültigen Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta \hat{s}_k = \hat{s}_k' - \hat{s}_k = \hat{s}_k^{(Z)} + \delta \hat{s}_k^{(Z)} - \hat{s}_k, \quad \hat{s}_v^{(Z)} = \hat{s}_v + \delta \hat{s}_v^{(Z)}, \\ \hat{s}_k' = \hat{s}_k^{(Z)} + \delta \hat{s}_k^{(Z)} = \hat{s}_k + \delta \hat{s}_k \end{aligned}$$

sowie der Randbedingungen (3,6), bzw. (3,7) nach Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung bereits die einfache Form:

$$\begin{aligned} \sum_{C[r,s]} - \oint_{F_{rs}} (P_v^{(Z)} \hat{s}_k^{(Z)}, n) df \\ = 2 \frac{\delta \omega}{\omega_0} \int_{V_\Sigma - \sum_{C[r,s]} V_{rs}} (\hat{s}_k, \overrightarrow{\text{div}} P_v) d\tau. \end{aligned} \quad (4,17)$$

Nach erneuter Anwendung des Gaußschen Satzes als auch der Identität (4,13) erhält man das Gleichungssystem in der gewünschten Form:

$$\begin{aligned} \sum_{C[r,s]} \int_{F_{rs}} [(\hat{s}_k^{(Z)}, \overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}) + P_v^{(Z)} G_k^{(Z)}] d\tau \\ = 2 \frac{\delta \omega}{\omega_0} \int_{V_\Sigma - \sum_{C[r,s]} V_{rs}} (\hat{s}_k, \overrightarrow{\text{div}} P_v) d\tau \end{aligned} \quad (4,18)$$

Für die einzelnen Integrale, die Energieterm darstellen, verwenden wir die Abkürzungen:

$$W_{vp} = \int_{V_\Sigma - \sum_{C[r,s]} V_{rs}} (\overrightarrow{\text{div}} P_v, \hat{s}_p) d\tau, \quad (4,19)$$

$$A_{vp} = \int_{V_{rs}} [(\overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}, \hat{s}_p^{(Z)}) + P_v^{(Z)} G_p^{(Z)}] d\tau. \quad (4,20)$$

Wegen  $\hat{s}_k^{(Z)} = \sum_{p=1}^n \alpha_{kp} \hat{s}_p^{(Z)}$

und  $G_k^{(Z)} = \overrightarrow{\text{grad}} \hat{s}_k^{(Z)} = \alpha_{kp} \overrightarrow{\text{grad}} \hat{s}_p^{(Z)}$

erhält man bei Verwendung der Abkürzungen (4,19) und (4,20) das Gleichungssystem:

$$\int_{V_{rs}} [(\overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}, \hat{s}_k^{(Z)}) + P_v^{(Z)} G_k^{(Z)}] d\tau = \sum_{p=1}^n \alpha_{kp} A_{vp}^{(r,s)}. \quad (4,21)$$

Schreibt man die linke Seite von Gleichung (4,18) in der Form:

$$\begin{aligned} \sum_{C[r,s]} \int_{F_{rs}} [(\overrightarrow{\text{div}} P_v^{(Z)}, \hat{s}_k^{(Z)}) + P_v^{(Z)} G_k^{(Z)}] d\tau \\ = \sum_{p=1}^n \alpha_{kp} \sum_{C[r,s]} A_{vp}^{(r,s)} \end{aligned} \quad (4,22)$$



und berücksichtigt, daß für die Terme im einzelnen gilt:

- a) für  $v \neq p$
1.  $(r, s) \neq (v, p)$
  2.  $(r, s) = (v, p)$
- $$A_{vp} = \begin{cases} 0 \\ A_{vp}^{(v,p)} = A_{vp} \end{cases}$$
- b) für  $v = p$
3.  $r \neq v$
  4.  $r = v$
- $$A_{vv}^{(r,s)} = \begin{cases} 0 \\ A_{vv}^{(v,s)} \end{cases}$$

so läßt sich das erhaltene Gleichungssystem weiter vereinfachen. Die Abb. 2 veranschaulicht im besonderen die Terme der Gruppe (a, 2).

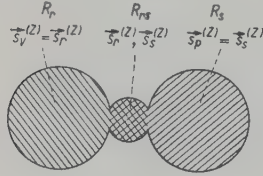


Abb. 2. Energieterme eines Koppelgliedes der Gruppe (a, 2).

Für die Energieterme  $W_{vp}$  der Resonatoren selbst findet man:

mit  $v \neq p$  wird  $W_{vp} = 0$

mit  $v = p$  wird  $W_{vp} = W_{vv}$

$$= 2 \int (\vec{\text{div}} P_v, \vec{s}_v) d\tau \\ V_{\Sigma} - \sum_{C[r,s]} V_{rs}$$

Durch die Verwendung der Abkürzungen (4,19) gewinnt die rechte Seite von Gl. (4,18) die Gestalt:

$$2 \int (\vec{s}_k, \vec{\text{div}} P_v) d\tau = \sum_{p=1}^n \alpha_{kp} W_{vp} = \alpha_{kv} W_{vv} \\ V_{\Sigma} - \sum_{C[r,s]} V_{rs}$$

Desgleichen schreibt man statt Gl. (4,22):

$$\sum_{p=1}^n \alpha_{kp} \sum_{C[r,s]} A_{vp}^{(r,s)} = \sum_{p=1}^n \alpha_{kp} A_{vp} + \alpha_{kv} \sum_{s=1}^n A_{vv}^{(v,s)}.$$

Damit erhält das grundlegende Gleichungssystem die übersichtliche Form:

$$\sum_{p=1}^n \alpha_{kp} A_{vp} + \alpha_{kv} \left\{ \sum_{s=1}^n A_{vv}^{(v,s)} - \frac{\delta \omega}{\omega_0} W_{vv} \right\} = 0 \quad (4,23) \\ (v = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n).$$

Dieses lineare Gleichungssystem besitzt als Lösungen der als Säkulargleichung bekannten Systemdeterminante

$$\begin{vmatrix} \sum_s A_{11}^{(1,s)} - \delta \bar{\omega} W_{11}, & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21}, & \sum_s A_{22}^{(2,s)} - \delta \bar{\omega} W_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2} & \dots & \sum_s A_{nn}^{(n,s)} - \delta \bar{\omega} W_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4,24)$$

die gesuchten Aufspaltungsfrequenzen. Wegen der Symmetrie der Terme  $A_{vp} = A_{pv}$  ist die

Determinante ebenfalls symmetrisch. Setzt man den Rang der Determinante mit  $(n-1)$  voraus, so folgt daraus die Existenz von  $n$  reellen Lösungen. Es sind dies die erstrebten Aufspaltungsfrequenzen

$$\delta \bar{\omega}_k = \delta \omega_k / \omega_0.$$

Die Säkulargleichung ist allgemein anwendbar, da sie als Rechengrößen ausschließlich Schallfeldgrößen der ungestörten Konfiguration enthält<sup>1</sup>. Sie wurde unter Berücksichtigung sowohl der festen als auch der freien Berandung abgeleitet. Von den Termen sind die  $A_{vv}$  für die Kopplung verantwortlich, während die  $A_{vp}^{(v,s)}$  die Rückwirkung der energetisch abgeschlossenen Koppelglieder auf die einzelnen Resonatoren bestimmen.

Zusammenhänge elementarer Natur, wie sie für die Säkulargleichung Gültigkeit haben, sind vor allem für die Fälle der Praxis von Bedeutung. Es ist offensichtlich, daß sich die geometrische Anordnung der Resonatoren und ihrer Koppelglieder in der Struktur der Determinante wieder spiegelt. Es ist dies der Fall für Resonatoren oder Koppelglieder gleicher Beschaffenheit, Serienschaltungen usw.

## 5. Störungsrechnung des skalaren Problems

Die allgemeine schubspannungsfreie Materie gestattet nicht mehr die vereinfachende Annahme der Inkompressibilität. Die Dichte wird an jeder Stelle des Raumes durch den dort wirkenden Druck in eindeutiger Weise bestimmt. Der Spannungstensor entartet zu einem Skalar, wodurch die elastische Grundgleichung die wesentlich vereinfachte Form

$$\rho \partial^2 \vec{s} / \partial t^2 = \text{grad } P \quad (5,1)$$

annimmt. Mit

$$P = \lambda \text{div } \vec{s} E$$

gilt für die Vektordivergenz  $P$ :

$$\vec{\text{div}} P = \lambda \text{grad} (\text{div } \vec{s}) = \text{grad } P.$$

Nach den im Abschnitt 3 gebrachten Ergebnissen gelangt man nach Einführung des skalaren Potentials  $\varphi$  der Wellengleichung

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad \text{worin} \quad k^2 = \rho \omega^2 / \lambda$$

gesetzt ist. Das hier vorliegende Problem ist auf ein skalares zurückgeführt. Durch sinngemäße Wiederholung der störungstheoretischen

<sup>1</sup> Für schwach gekoppelte verlustfreie elektromagnetische Hohlraumresonatoren kommen E. LEDINEGG und P. URBAN

(Acta Phys. Austriaca **2** [1948], 198) zu einer ähnlich gebauten Säkulardeterminante.

Überlegungen soll die spezielle Form der Säkular-determinante für schubspannungsfreie Medien gewonnen werden.

Die Eigenfunktionen, für die ein stetiger Übergang in den Randbedingungen bestehen soll, werden hier ebenfalls als Linearaggregate

$$\varphi_k = \sum_{v=1}^n \alpha_{kv} \varphi_v$$

mit  $k = 1, 2, \dots, n$  dargestellt.

Für die variierten Größen gilt

$$\bar{\varphi}_k = \varphi_k + \delta\varphi_k, \quad \omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0\delta\omega.$$

Die Wellengleichungen, sowohl für den ungestörten als auch den gestörten Zustand angesetzt,

$$\Delta\varphi_k = -(\varrho\omega_0^2/\lambda)\varphi_k, \quad (5,2)$$

$$\Delta\bar{\varphi}_k = -(\varrho\omega^2/\lambda)\bar{\varphi}_k, \quad (5,3)$$

bilden den Ausgangspunkt.

Wegen der sinnvollen Wiederholung der einzelnen Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes, die rechnerisch gestaltet außerdem eine wesentlich einfachere Form besitzen, wird hier auf die Teilschritte verzichtet.

Die der Gl. (3,18) entsprechende Systemgleichung lautet für das skalare Problem:

$$\begin{aligned} \sum_{C[r,s]} \int_{V_{rs}} (\text{grad } \varphi_v^{(Z)} \text{ grad } \varphi_k^{(Z)} + \varphi_k^{(Z)} \Delta \varphi_v^{(Z)}) d\tau \\ = \int_{V_{\Sigma} - \sum_{C[r,s]} V_{rs}} \varphi_k \Delta \varphi_v d\tau, \end{aligned} \quad (5,4)$$

wobei die Indizes der Eigenfunktionen sinngemäß übernommen wurden. Dieses Ergebnis stellt daher einen Spezialfall des allgemeinen vektoriellen Problems dar.

## 6. Das vektorielle Problem bei Verstimmung durch Volumendeformation

Es wird im folgenden das Problem erweitert. Für den Fall einer Verstimmung durch Deformation wird die Frequenzgleichung des Resonatorensystems abgeleitet.

Auf Grund der Tatsache, daß ein schwach gekoppeltes akustisches Resonatorensystem unter bestimmten Voraussetzungen einen Vierpol darstellt, läßt sich die abgeleitete Theorie zur Erfassung der Filterwirkung eines derartigen Vierpols verwenden. Zur Bestimmung der Durchlaßgebiete einer schwach gekoppelten Resonatorenkonfiguration sei eine gegenseitige Verstimmung möglich. Diese wird im wesentlichen durch eine Volumendeformation erreicht. Die Eigenfrequenzen sind gleichzeitig Grenzfrequenzen der Durchlaßbereiche.

Zur Beibehaltung der vorangegangenen Methode wird eine gemeinsame Eigenfrequenz der Einzelresonatoren im entkoppelten Zustand angenommen, die Kopplung des Systems durch einen simultanen Vorgang bewirkt und schließlich die Verstimmung durch eine Deformation erzwungen. Die Kopplungsänderung vom Nullwert zum Endwert wird durch das Öffnen von in den Kopplflächen angebrachten Blenden realisiert.

Die Rechnung läuft übereinstimmend mit Abschnitt 4 bis zur Beziehung (4,14).

Zur Auswertung der Randbedingungen (3,6) bzw. (3,7) wird sodann über das Volumen des Endzustandes unter Ausschluß der Koppelräume  $R_s$  integriert. Das durch die Deformation der Resonatoren verdrängte Volumen wird mit  $\Delta V_r$  bezeichnet, während  $\bar{V}_{\Sigma}$  die Hüllfläche des Gesamtsystems im Endzustand darstellt. Durch Integration über das Volumen

$$V_{\Sigma} - \sum_{C[r,s]} V_{rs} - \sum_{r=1}^n \Delta V_r$$

und gleichzeitige Anwendung des Gaußschen Satzes erhält man aus Gl. (4,14) das System:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\delta\omega}{\omega_0} V_{\Sigma} - \sum_{C[r,s]} V_{rs} - \sum_{r=1}^n \Delta V_r \\ + \int (\delta P_k G_v^{(Z)} - P_v^{(Z)} \delta G_k) d\tau \\ V_{\Sigma} - \sum_{C[r,s]} V_{rs} - \sum_{r=1}^n \Delta V_r \\ = \sum_{C[r,s]} \oint_{F_{rs}} [(\delta P_k \vec{s}_v^{(Z)}, n) - (P_v^{(Z)} \delta \vec{s}_k, n)] df + \\ + \oint_{\bar{F}_{\Sigma}} [(\delta P_k \vec{s}_v^{(Z)}, n) - (P_v^{(Z)} \delta \vec{s}_k, n)] df. \end{aligned} \quad (6,1)$$

Zur Gewinnung einer Übersicht des Integrationsbereiches der Gl. (6,1) dient die Abb. 3.

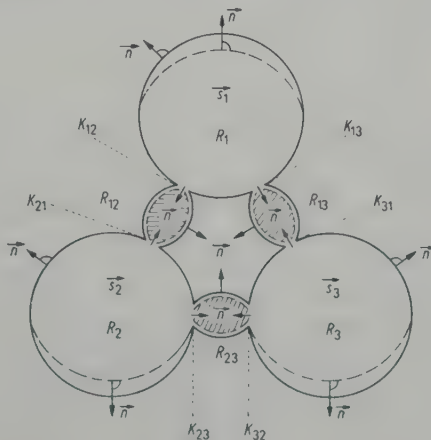


Abb. 3. Integrationsbereich der Gl. (6,1).



Der Integrand in der zweiten Zeile von Gl. (6,1) verschwindet exakt, während in den der ersten Zeile

$$\dot{s}_k' = \dot{s}_k^{(Z)} + \delta \dot{s}_k^{(Z)} = \dot{s}_k + \delta \dot{s}_k \quad (6,2)$$

eingeführt wird.

Für das Integral in der vierten Zeile von Gl. (6,1) wird gesetzt:

$$J(\bar{F}_\Sigma) = \int_{\bar{F}_\Sigma} [(\delta P_k \dot{s}_k^{(Z)}, n) - (P_v^{(Z)} \delta \dot{s}_k, n)] d\mathbf{f} \quad (6,3)$$

Für die Fläche  $\bar{F}_\Sigma$  gilt die Randbedingung  $(\dot{s}_k', n) = 0$ . Mit  $F_g$  wird die aus  $F_\Sigma$  und  $\bar{F}_\Sigma$  zusammengesetzte Fläche bezeichnet. In dem Integral

$$J(F_g) = J(\bar{F}_\Sigma) + J(F_\Sigma) = J(\bar{F}_\Sigma) \quad (6,4)$$

verschwindet  $J(F_\Sigma)$  wegen der Randbedingung.

Substituiert man Gl. (6,2) in (6,3), so bekommt man bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung nach einfacher Rechnung für das Integral in der vierten Zeile von Gl. (6,1):

$$J(\bar{F}_\Sigma) = \sum_{r=1}^n \int_{\Delta V_r} [(\vec{\text{div}} P_v, \dot{s}_k) + P_v G_k] d\tau \quad (6,3')$$

Der Summenausdruck in der dritten Zeile von Gl. (6,1) läßt sich unter Berücksichtigung der Randbedingung (3,6) durch einfache Rechnung umformen auf:

$$\begin{aligned} & \sum_{C[r,s]} \int_{V_{rs}} \text{div } P_v^{(Z)} \dot{s}_k^{(Z)} d\tau \\ &= \sum_{C[r,s]} \int_{V_{rs}} [(\dot{s}_k^{(Z)}, \vec{\text{div}} P_v^{(Z)}) + P_v^{(Z)} G_k^{(Z)}] d\tau. \quad (6,5) \end{aligned}$$

Damit sind sämtliche gestörten Feldgrößen aus Gl. (6,1) eliminiert und sie erhält die Gestalt:

$$\begin{aligned} & \frac{2\delta\omega}{\omega_0} \int_{V_\Sigma - \sum_{C[r,s]} V_{rs} - \sum_{r=1}^n \Delta V_r} (\vec{\text{div}} P_v, \dot{s}_k) d\tau \\ &= \sum_{C[r,s]} \int_{V_{rs}} [(\dot{s}_k^{(Z)}, \vec{\text{div}} P_v^{(Z)}) + P_v^{(Z)} G_k^{(Z)}] d\tau + \\ &+ \sum_{r=1}^n \int_{\Delta V_r} [(\dot{s}_k, \vec{\text{div}} P_v) + P_v G_k] d\tau. \quad (6,6) \end{aligned}$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man für die Randbedingung (3,7). Die Rechnung verläuft analog, lediglich an Stelle von Gl. (6,2) ist die entsprechende Beziehung der Spannungstensoren zu verwerfen.

Zur Gewinnung einer besseren Übersicht werden die Abkürzungen eingeführt. Bei stetigem Über-

gang vom Anfangs- zum Endzustand wird das passend gewählte Linearaggregat der Eigenfunktionen

$$\dot{s}_k = \sum_{v=1}^n \alpha_{kv} \dot{s}_v, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

stetig in den Endzustand übergehen. Durch die Einführung der analogen Beziehung

$$\dot{s}_k^{(Z)} = \sum_{p=1}^n \alpha_{kp} \dot{s}_p^{(Z)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

in Gl. (6,6) lassen sich die Energieterme durch die vorgegebenen Feldvektoren ausdrücken. Die Abkürzungen (4,19) und (4,20) werden ergänzt durch:

$$B_{vp} = \int_{\Delta V} [(\vec{\text{div}} P_v, \dot{s}_p) + P_v G_p] d\tau. \quad (6,7)$$

Es gilt:

$$B_{vp} = \begin{cases} 0 & r \neq v, p \\ B_{vv} & r = p = v. \end{cases}$$

Damit geht die Beziehung (6,6) in das lineare System:

$$\sum_{p=1}^n \alpha_{kp} A_{vp} + \alpha_{kv} \left( \sum_{p=1}^n A_{vp}^{(v,s)} + B_{vv} - \frac{\delta\omega}{\omega_0} W_{vv} \right) = 0$$

$$(v = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n) \quad (6,8)$$

über. Den hinzugekommenen Termen  $B_{vv}$  kommt die Funktion der Verstimmung des Systems zu. Mit allen Termen  $B_{vv} = 0$  geht das Problem in das in Abschnitt 4 behandelte über.

Das in den  $\alpha_{kp}$  lineare und homogene System (6,8) ist durch das Verschwinden der Systemdeterminante

$$\begin{vmatrix} \sum_s A_{11}^{(1,s)} + B_{11} - \frac{\delta\omega}{\omega_0} W_{11}, & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2} & \dots & \sum_s A_{nn}^{(n,s)} + B_{nn} - \frac{\delta\omega}{\omega_0} W_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (6,9)$$

in nichttrivialer Weise lösbar. Die  $n$  Eigenfrequenzen können unter Umständen zusammenfallen, doch sind sie wegen der Symmetriebedingung  $A_{ik} = A_{ki}$  stets reell.

## 7. Kopplungsparameter eines Zweiresonatorsystems

Die Methode der Verwendung elektrischer Ersatzschaltbilder hat sich in der akustischen Leitungstechnik bewährt. Auch der Bau akustischer Siebketten hat den elektrischen Analogiefall zum Vorbild. Durch Gl. (6,9) läßt sich neben den möglichen Koppelschwingungen auch die Filterwirkung eines derartigen Systems angeben.

Sie enthält bereits die Grenzpunkte der Durchlaßbereiche.

Doch auch die Kopplungsparameter lassen sich daraus allgemein ableiten, was in diesem Abschnitt an Hand eines Zweiresonatorsystems gezeigt wird. Dieses Ergebnis ist vor allem für die auf dem Gebiete der Ultraakustik im Vordergrund stehenden Fragen der Anpassung, Kopplung und Verstimmung im Zusammenhang mit dem Energietransport durch akustische Leitungen [7] von Bedeutung.

Es wird nun der funktionelle Zusammenhang der Kopplungsparameter mit den Energietermen für ein symmetrisches Zweiresonatorsystem abgeleitet. Der allgemeine Charakter der Ableitung beruht auf der Verwendung der Feldvektoren.

Als Kopplungsparameter werden eingeführt:

- a) der Kopplungsgrad  $k$ ,
- b) die Verstimmung des Einzelresonators  $p$ ,
- c) der Verstimmungsgrad des Gesamtsystems  $v$ .

Die Kopplungsparameter sind dimensionslos und erweisen sich für die durch die energetischen Wechselwirkungen der Einzelräume bewirkte Frequenzaufspaltung verantwortlich. Die Säkulardeterminante lautet für ein symmetrisches Zweiresonatorsystem:

$$\begin{vmatrix} A_{11}^{(1,2)} + B_{11} - \frac{\delta\omega}{\omega_0} W_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22}^{(2,1)} + B_{22} - \frac{\delta\omega}{\omega_0} W_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7,1)$$

Wird nur ein Resonator verstimmt, was prinzipiell keine Einschränkung bedeutet, es sei  $R_2$ , so kann man  $B_{11} = 0$  setzen. Die Energieterne von Gl. (7,1) setzt man durch die physikalisch begründeten Kopplungsparameter an.

Wenn  $W_{11} = W_{22} = W$  die Gesamtenergie eines Einzelresonators ist, so läßt sich der gemischte Term des Koppelraumes mit dem Verstimmungsparameter proportional setzen:

$$A_{11}^{(1,2)} = A_{22}^{(2,1)} = pW.$$

Weiter wird der aus den Feldgrößen eines einzelnen Nachbarräume sich zusammensetzende Energieanteil des Koppelraumes, mit dem Kopplungsgrad proportional gesetzt:

$$A_{12} = A_{21} = kW$$

Schließlich wird die Energie des Deformationsraumes mit dem Verstimmungsgrad proportional gesetzt:

$$B_{22} = vW.$$

Den Zusammenhang zwischen Koppelfrequenzen und Systemparametern erhält man durch Einsetzen der letzteren in Gl. (7,1).

Die Lösungen der Gleichung zweiten Grades,

$$(\delta\omega/\omega_0)^2 - (2p + v)\delta\omega/\omega_0 + p^2 + pv - k^2 = 0,$$

sind die Aufspaltungsfrequenzen

$$(\delta\omega_i/\omega_0) = \frac{1}{2}(2p + v \pm \sqrt{v^2 + 4k^2}); \quad i = 1, 2.$$

Vernachlässigt man den Verstimmungsanteil des Koppelraumes, so bekommt man mit  $p = 0$  die Aufspaltungsfrequenzen

$$(\delta\omega_i/\omega_0) = \frac{1}{2}(v \pm \sqrt{v^2 + 4k^2}), \quad i = 1, 2.$$

Den Inhalt dieser Gleichung veranschaulicht Abb. 4.

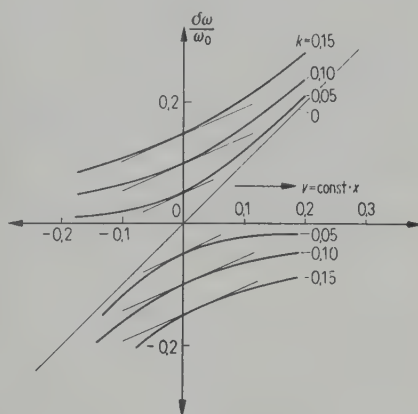


Abb. 4. Aufspaltungsfrequenzen als Funktion der Verstimmung  $v$ , Parameter ist der Kopplungsgrad  $k$ .

Der Kopplungsgrad  $k$  ist Scharparameter, für  $k = 0$  wird  $\delta\omega/\omega_0$  eine lineare Funktion von  $v$ .

Auch der Fall ohne Verstimmung durch Volumendeformation ist von Interesse. Die Verstimmung wird nur durch die Koppelleitung bewirkt. Die Koppelfrequenzen lauten in diesem Fall:

$$(\delta\omega_i/\omega_0) = p \pm k.$$

Verschwindet zusätzlich  $k$ , so folgt  $(\delta\omega/\omega_0)_{1,2} = p$ . Es existiert eine einzige Koppelfrequenz. Für  $p = 0$  werden die Aufspaltungsfrequenzen gleich dem Kopplungsgrad.

Wegen der allgemein gemachten Voraussetzung  $\delta\omega/\omega_0 \ll 1$  wird hier ersichtlich, daß  $p$  und  $k$  ganz allgemein sehr kleine Größen sein müssen. Sind die Koppelfrequenzen gegeben, indem sie zum Beispiel einer Messung zugänglich sind, so lassen sich die Parameter  $p$  und  $k$  mittels der symmetrischen Grundfunktionen ausdrücken als:

$$p = (\delta\omega_1 + \delta\omega_2)/2\omega_0, \quad k = (\delta\omega_1 - \delta\omega_2)/2\omega_0.$$



### 8. Infinitesimale Deformation eines Einresonatorensystems

Die Anwendungsmöglichkeiten der Störungsrechnung auf ein akustisches Resonatorensystem sind vielseitig. Die Frequenzänderung eines infinitesimal deformierten, schubspannungs- und reibungsfreien Einresonatorensystems kann vektoriell (Abschnitt 4) oder skalar (Abschnitt 5) abgeleitet werden. Ist  $\omega_0$  ein nicht entarteter Eigenwert der Eigenfunktion  $\vec{s} = \vec{s}_0 = \text{grad } \varphi_0$ , so erfolgt von diesem Ausgangszustand ein Übergang zu einem benachbarten, durch Deformation gestörten Zustand.

Die Rechnung ergibt für den festen und freien Rand dasselbe Ergebnis. Die vektorielle Störungsrechnung ergibt für die Frequenzänderung des Einresonatorensystems — es erübrigt sich auf die Teilschritte einzugehen, da es sich um eine starke Vereinfachung des allgemeinen Falles (Abschnitt 4) handelt — ausgedrückt durch das ungestörte Feld:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\int_V [(\vec{s}_0, \vec{\text{div}} P_0) + P_0 S_0] d\tau}{2 \int_V P_0 S_0 d\tau} \quad (8,1)$$

Das skalare Rechenverfahren erbringt als gleichwertiges Ergebnis, da es sich um ein schubspannungsfreies Medium handeln soll:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\int_V (\varphi_0, \text{div grad } \varphi_0 + \text{grad } \varphi_0, \text{grad } \varphi_0) d\tau}{2 \int_V (\text{grad } \varphi_0, \text{grad } \varphi_0) d\tau} \quad (8,1')$$

#### Anwendung

##### Radialschwingung eines Kreiszylinders

Es soll als Anwendungsbeispiel die Frequenzänderung eines in der radialen Grundschwingung erregten, schubspannungsfreien Kreiszylinders nach Gl. (8,1) und (8,1') berechnet werden.

Für den Kreiszylinder sind die radialen Dehnungsschwingungen sowohl für feste isotrope Stoffe, als auch für schubspannungsfreie Medien bekannt [8]. Wenngleich die Störungsrechnung im allgemeinen auch erst bei exakt nicht lösaren Problemen an Bedeutung gewinnt, so ist dieses Beispiel trotzdem besonders geeignet, da man eine zusätzliche Überprüfungsmöglichkeit an Hand der exakten Rechnung hat. Der Einfachheit halber sei die Volumenänderung durch die Änderung des Radius bewirkt.

Verwendet man ein allgemeines Zylinderkoordinatensystem, so lassen sich die radialen Dehnungsschwingungen in bekannter Weise durch Besselsche Funktionen darstellen.

Von der Wellengleichung ausgehend, gelangt man zu der partikulären Lösung:

$$\varphi = J_m \left[ \sqrt{k^2 - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2} r \right] \cos m\alpha \cos \frac{n\pi}{l} z.$$

Mit  $m=0$  und  $n=0$  erhält man die radiale Grundschwingung  $\varphi_0 = J_0(kr)$  und  $k = y_{11}/r = y'_{01}/r$ , wobei unter  $y'_{01}$  die erste Nullstelle der Ableitung der Besselschen Funktion nullter Ordnung zu verstehen ist. Der Verschiebungsvektor hat für die Lösung die Komponenten

$$\vec{s}_0 = (-k_0 J_1(k_0 r), 0, 0)$$

Es sind daher auch nur die Randbedingungen für den Mantel von Interesse. Für die Mantelfläche vor der Deformation (Radius =  $r$ ) gilt die Randbedingung:

$$\partial\varphi_0/\partial r = -k_0 J'_0(k_0 r) = 0.$$

Bei Verwendung von elementaren Funktionalgleichungen und Differentialformen für Besselsche Funktionen lassen sich die Integrale der Gl. (8,1) einzeln auswerten.

Man erhält nach elementarer Rechnung:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\int_V [(\vec{s}_0, \vec{\text{div}} P_0) + P_0 S_0] d\tau}{2 \int_V P_0 S_0 d\tau} = \frac{R^2 [J_0^2(k_0 R) + J_0(k_0 R) J_2(k_0 R) - 2r^2 J_0^2(k_0 r)]}{2r^2 J_0^2(k_0 r)}.$$

Nach Reihenentwicklung der Funktion

$$f(R) = R^2 [J_0^2(k_0 R) + J_0(k_0 R) J_2(k_0 R)]$$

erhält man weiter, bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung, durch einfache Rechnung:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{r^2 J_0^2(k_0 r) + 2r \delta r J_0^2(k_0 r) - r \delta r J_0^2(k_0 r) - r^2 J_0(k_0 r)}{r^2 J_0^2(k_0 r)} = \delta r/r.$$

Als zweiter Schritt folgt die Berechnung der Frequenzänderung nach der skalaren Theorie (Gl. (8,1')). Die Eigenfunktion der radialen Grundschwingung lautet:  $\varphi_0 = J_0(k_0 r)$ . Ihre Ableitungen sind gegeben durch:

$$\text{grad } \varphi_0 = \vec{s}_0, \quad \text{div grad } \varphi_0 = \text{div } \vec{s}_0 = \Delta \varphi_0, \\ \Delta \varphi_0 = -k_0^2 \varphi_0 = -k_0^2 J_0(k_0 r).$$

Durch elementare Auswertung der bestimmten Integrale erhält man für die Frequenzänderung nach Gl. (8,1'):





$$Q_2^{(z_1)} = \frac{jZ_k J_0}{\sin \omega_0 l_k} \cos \omega_0 (l_k - x),$$

$$J_2^{(z_1)} = -\frac{J_0}{\sin \omega_0 l_k} \sin \omega_0 (l_k - x). \quad (9,11)$$

An Hand dieser Beziehungen lassen sich nun die Integrale elementar auswerten:

$$W_{11} = 2 \int_{V_1} (\vec{\text{div}} P_1, \vec{s}_1) d\tau = \frac{\lambda \omega_0^2 J_0^2 l}{\omega^2},$$

$$A_{12} = \int_{V_{12}} [(\vec{\text{div}} P_1^{(z_1)}, \vec{s}_2^{(z_1)}) + P_1^{(z_1)} G_2^{(z_1)}] d\tau$$

$$= \frac{\omega_0^2 \lambda_k J_0^2}{\omega^2 \omega_0 \sin \omega_0 l_k},$$

$$A_{11}^{(1,2)} = \int_{V_{12}} [(\vec{\text{div}} P_1^{(z_1)}, \vec{s}_2^{(z_1)}) + P_1^{(z_1)} G_2^{(z_1)}] d\tau$$

$$= \frac{\omega_0^2 \lambda_k J_0^2}{\omega^2 \omega_0} \text{ctg} \omega_0 l_k.$$

Die Säkulargleichung (9,7) lautet demnach:

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_k \text{ctg} \omega_0 l_k}{\omega_0} - \delta \omega \lambda l, & \frac{\lambda_k}{\omega_0 \sin \omega_0 l_k} \\ \frac{\lambda_k}{\omega_0 \sin \omega_0 l_k}, & \frac{\lambda_k \text{ctg} \omega_0 l_k}{\omega_0} - \delta \omega \lambda l \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man wieder die Wellenwiderstände ein, so lauten die Aufspaltungsfrequenzen:

$$\delta \omega_{1,2} = \frac{Z_k}{Z} \frac{1}{l \text{tg} \omega_0 l_k} \left( 1 \pm \frac{1}{\cos \omega_0 l_k} \right).$$

Damit ist volle Übereinstimmung mit der nach der Leitungstheorie erhaltenen Lösung (9,6) erreicht.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. URBAN, sowie Herrn Prof. Dr. E. LEDINEGG bin ich für die Anleitung der Arbeit sowie das entgegengebrachte fördernde Interesse zu größtem Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 4. Juni 1954.)

#### Schrifttum

- [1] RAYLEIGH, R., Theorie des Schalles. Übersetzt von F. NEESEN, Braunschweig 1880, S. 93...173.
- [2] WIEN, M., Ann. Phys. Lpz. **61** [1897], 151.
- [3] Handbuch der Physik, Bd. 8, Kap. 3, Springer-Verlag, Berlin 1927.
- [4] GIEBE, E. und BLECHSCHMIDT, E., Ann. Phys. Lpz. **18** [1933], 458.
- [5] SCHOCH, A., Ergeb. exakt. Naturw. **22** [1950], 127...234.
- [6] LEDINEGG, E. und URBAN, P., Acta Phys. Austriaca **8** [1953], 16.
- [7] HÜTER, TH., Z. angew. Phys. **1** [1949], 274.
- [8] Handbuch der Physik, Bd. 6, Kap. 2 und 4, Springer-Verlag, Berlin 1928.

#### Bookreview

E. SKUDRZYK. Die Grundlagen der Akustik; 1st ed. Springer-Verlag, Wien, 1954. 1084 pages, 450 fig.,  $16 \times 24 \text{ cm}^2$ , price DM 147,— or sfr. 150.—.

The book gives in a concise form what scientists in acoustical research ought to know about theoretical acoustics. It is mathematical in the first instance, but over and over again the author shows by practical examples how the theoretical results can be used advantageously for solving practical problems.

The order in which the subjects are treated is rather unusual but, on closer examination, very well chosen. Fourier series, -integrals, Laplace transforms and transient phenomena are treated first, thus telling the reader that the knowledge of the steady-state behaviour of a system is sufficient for the treatment of all complex phenomena, but warning him at the same time to look out for pitfalls that he may not be aware of.

The author proceeds then with the derivation and solution of the differential equations of the sound field in rectangular, cylindrical and spherical coordinates, exemplifying their use in application to important problems such as reflexion, standing wave tubes, radiation, characteristic frequencies, diffraction, etc. Special chapters are devoted to electromechanical analogies, mechanical systems with distributed mass and compliance, coupled systems, transducers, microphones, transmitters, piezoelectricity, speech

and hearing, wave theory in room acoustics, room acoustics, sound absorption, lined ducts, dissipation of heat, underwater acoustics, etc. In the last chapter non-linear phenomena are dealt with.

Relatively few references are given in the text, so that it is not always clear where the original publications are to be found. The book ends however with 126 pages of references, classified according to subjects in the same order as the text. This bibliography seems invaluable.

Even when bearing in mind that many good books on acoustics have appeared in the last five years, I do not hesitate to state that the book fills a need. It is undoubtedly outstanding and on the whole astonishingly up-to-date. One might have doubts about the relative importance of subjects dealt with and the absence of certain topics, but it cannot be denied that each chapter gives so much valuable information that it is an excellent basis for further research.

In view of the many outstanding qualities of the book it would be ungrateful to point to shortcomings and errors of minor importance that could be put right in a possible second edition. In spite of the rather high price I am convinced the book will find its way to all centres of acoustical research.

As was to be expected in a book of a high scientific level, the MKS-system of units is used exclusively.

C. W. KOSTEN

# DIE EINSTELLUNG VON TEILCHEN UND LÖSUNGEN IM FELD STEHENDER ULTRASCHALLWELLEN

VON GERTRUD KECK

Institut für Medizinische Physik der Universität Wien, Vorstand: Prof. HAUER

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Einstellorte von verschiedenartigen Teilchen sowie von kolloidalen und echten Lösungen im Feld stehender Ultraschallwellen. Spezifisch schwerere Teilchen, die in einer Flüssigkeit schon vor Schalldurchgang suspendiert sind, werden in die Ebenen der Druckknoten getrieben. Bringt man hingegen eine wässrige Suspension in das schon bestehende Schallfeld, so stellen sich schwerere Teilchen (auch kolloidale) in die Druckbäuche, leichtere in die Druckknoten ein. Selbst echte Lösungen fließen beim Einströmen in die durchschallte Flüssigkeit in die Bäuche, wenn sie schwerer, und in die Knoten, wenn sie leichter sind als die durchschallte Flüssigkeit. Echte Lösungen gleicher Dichte wie die Grundflüssigkeit wandern sowohl in die Knoten, als auch in die Bäuche.

## Summary

This work concerns the location of particles in stationary ultrasonic waves. If heavy particles are suspended in a liquid before turning on the sound field they are driven to the pressure nodes. If, however, the field is already established and the particles then added, heavy ones are driven to the antinodes, light ones to the nodes. True solutions added to the irradiated liquid move toward the nodes if they are heavier, to the nodes if lighter than the irradiated liquid. If both have the same density, the solution may move either way.

## Sommaire

Dans le présent travail, on détermine les régions où se rassemblent dans un champ d'ultrasons stationnaires les particules de différente nature, ainsi que les solutions colloïdales et les solutions véritables. Les particules spécifiquement les plus lourdes qui se trouvent déjà en suspension dans un liquide avant le passage des ultrasons, se rassemblent dans les plans des nœuds de pression. Par contre, si on place dans un champ sonore déjà établi une suspension aqueuse, les particules les plus lourdes (même colloïdales) se rassemblent aux ventres de pression, tandis que les particules les plus légères se rassemblent aux nœuds de pression. Les solutions véritables elles-mêmes, versées dans un liquide irradié aux ultrasons, s'écoulent vers les ventres si elles sont plus denses que le liquide irradié, et vers les nœuds si elles sont moins denses que ce liquide. Les solutions véritables qui ont même densité que le liquide irradié s'écoulent aussi bien vers les nœuds que vers les ventres.

Teilchen, die in ein Feld stehender Ultraschallwellen in Flüssigkeiten gebracht werden oder schon vor Bestehen des Feldes in der Flüssigkeit suspendiert sind, stellen sich in diesen in Ebenen im Abstand einer halben Schallwellenlänge ein und vermitteln so ein Bild der stehenden Ultraschallwelle in der Flüssigkeit. Diese Erscheinung wurde, von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend, schon in zahlreichen Arbeiten beschrieben. Es wurden Teilchen, wie zum Beispiel Koksstaub, Quarzpulver oder rote Blutkörperchen, in Wasser gebracht, um durch ihr Sinken in den Knotenstellen der Schallwelle ein Bild derselben zu vermitteln (BOYLE, LEHMANN, SÖRENSEN, DOGNON, BIANCANI u. a.) [1]. Gasblasen wurden in der gleichen Art verwendet (BOYLE und FROMANN, SÖLLNER) [2]. Auch bei Koagulationserscheinungen wurde ähnliches beobachtet. So gibt MARINESCO [3] an, daß bei Erzeugung einer stehenden Ultraschallwelle in einer konzentrier-

ten wäßrigen Lösung von Kongorot die gröberen Farbstoffteilchen in den Schwingungsbäuchen koagulieren. SÖLLNER und BONDY [4] zeigen, daß bei einer Flüssigkeit, die Teilchen enthält, die teils schwerer und teils leichter als die Flüssigkeit sind, die leichteren in die Bewegungsknoten der stehenden Welle wandern und die schwereren in die Schwingungsbäuche. Bei kolloidalen Zerteilungen soll dies aber nicht mehr zutreffen.

Ein Vergleich dieser zahlreichen Arbeiten zeigt wohl bei allen eine Einstellung der Teilchen im Abstand von einer halben Wellenlänge, über den Einstellungsort der Teilchen (Knoten oder Bäuche) herrscht jedoch keine Übereinstimmung. Dieser ist, wie die im folgenden beschriebenen Versuche zeigen, durch die Art des Einbringens der Teilchen bedingt.

Zur Untersuchung dieser Frage wurden die Teilchen im Schlierenbild der Knoten und Bäuche beobachtet. Die Versuchsanordnung war folgende:



In einem mit Wasser gefüllten Glastrog wurde der Schallkopf eines normalen Ultraschalltherapiegerätes mit vertikaler oder etwas geneigter Strahlfläche angebracht (Frequenz 1000 kHz, Schallintensität  $2\cdots 3 \text{ W/cm}^2$ ). Als Reflektor wurde eine Glasplatte im Abstand von einigen Zentimetern dem Schallkopf gegenüber gestellt. Die zur Feststellung des Einstellortes der Teilchen verwendete Schlierenanordnung ist in Abb. 1 dargestellt. Die Beobachtung des Schlierenbildes erfolgte nach Ausblendung des direkten Strahlenbündels durch Blende B auf einem Schirm S, auf dem gleichzeitig die in das Schallfeld gebrachten Teilchen scharf abgebildet wurden.

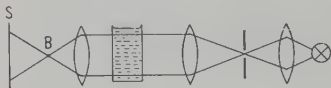


Abb. 1. Schlierenanordnung zur Feststellung des Einstellortes der Teilchen.

Die Versuche zur Einstellung der Teilchen wurden nun auf zwei verschiedene Arten ausgeführt:

1. Herstellung einer Suspension von Teilchen in Wasser mit *nachträglicher* Erzeugung von stehenden Wellen in der Suspension.
2. *Einbringen* einer wäßrigen Aufschwemmung der Teilchen, in das schon in Wasser bestehende Ultraschallfeld.

#### Versuch nach 1:

Von dem im Wasser erzeugten stehenden Ultraschallfeld wurde ein Schlierenbild auf dem Schirm entworfen und auf diesem wurden die Stellen der Druckknoten der stehenden Ultraschallwelle gekennzeichnet. Auf Vermeidung einer Parallaxe wurde dabei besonders geachtet. Nach Entfernung der Blende B wurde, ohne Ultraschalldurchgang, in der Flüssigkeit zwischen Schallkopf und Reflektor eine gleichmäßige Suspension von Weizenstärketeilchen im Wasser hergestellt und erst jetzt wieder die stehende Ultraschallwelle in der Flüssigkeit erzeugt. Die Teilchen stellten sich in Ebenen parallel zu Schallkopf und Reflektor in den *Druckknoten* der stehenden Schallwelle ein. Bei Verwendung leichterer Teilchen (Emulsion von Benzol in Wasser) stellten sich die Benzoltröpfchen jedoch in den *Druckbäuchen* der stehenden Welle ein.

#### Versuch nach 2:

Wieder wurden die Stellen der Druckknoten mit Hilfe des Schlierenbildes auf dem Schirm angezeichnet. Dann wurde jedoch mit Hilfe einer

Pipette eine Aufschwemmung von Weizenstärke in das *schon bestehende* Feld gebracht. Dabei stellten sich nun die Weizenstärketeilchen in die *Druckbäuche* der Schallwelle ein. Um den Versuch mit leichten Teilchen durchzuführen, wurde wieder eine grobe Emulsion von Benzol in Wasser hergestellt und in das Feld gebracht. Die Benzoltröpfchen begaben sich in die *Druckknoten*. Abb. 2 zeigt sowohl Weizenstärketeilchen als auch Benzoltröpfchen im Feld der stehenden Ultraschallwelle, wobei es sich bei der Abbildung um eine Photographie des Schirmbildes handelt. Die langen Striche sind Weizenstärketeilchen, die dazwischen befindlichen kugelförmigen Teilchen Benzoltröpfchen.

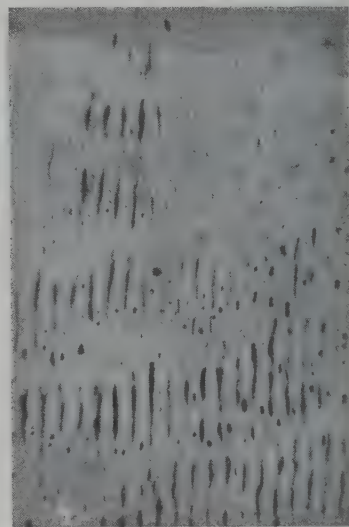


Abb. 2. Weizenstärketeilchen und Benzoltröpfchen im Feld der stehenden Ultraschallwelle.

Die Tabelle I faßt die Ergebnisse übersichtlich zusammen:

Tabelle I

	Teilchen sind vor Bestehen des Feldes in der Flüssigkeit gleichmäßig verteilt	Teilchen werden in das schon bestehende Feld gebracht
leichtere Teilchen	Druckbäuche	Druckknoten
schwerere Teilchen	Druckknoten	Druckbäuche

Das Bestehen der beiden dargelegten Gleichgewichtslagen ließ sich auch in folgender Weise zeigen: Stört man etwa durch vorsichtiges Durchfahren des Feldes mit einem Glasstab die Gleichgewichtslage 1, so verlassen die in den Knoten eingestellten Weizenstärketeilchen teilweise ihre Plätze und wandern in die Druckbäuche.

Einstellung von Lösungen

Die folgenden Versuche zeigen, daß sich im Gegensatz zu den bisherigen Erfahrungen auch kolloidal, ja sogar echt gelöste Teilchen, allerdings zusammen mit ihrem Lösungsmittel, einstellen. Bei diesen Versuchen wurde in die bisher verwendete Anordnung mittels einer Pipette ein Tropfen einer Kongorotlösung in das schon in Wasser bestehende Ultraschallfeld eingebracht. Dabei bilden sich sofort rote Streifen mit dem Abstand einer halben Wellenlänge. Diese Streifen werden durch Diffusion langsam unscharf und verschwinden schließlich trotz des bestehenden Feldes.

Wird ein Tropfen einer *echten* Lösung auf die gleiche Weise wie oben eingeführt, so tritt die gleiche Streifenbildung auf. Als echte Lösungen wurden Kaliumbichromat, Kupferchlorid, Eisenchlorid und Kaliumpermanganat verwendet; dieses zeigt wegen seiner starken Färbung den Effekt besonders schön.

Da es sich bei den *echt* gelösten Teilchen keinesfalls um die Einstellung der Teilchen selbst, sondern nur um die der Lösung als Ganzes handeln kann, wurde nach dem für die Einstellung der Lösung maßgebenden Merkmal gesucht und schließlich gefunden, daß das Vorhandensein eines *Dichteunterschiedes* zwischen eingebrachter Lösung und dem Wasser wesentlich ist.

Um den Einfluß des Dichteunterschiedes nachzuweisen, wurden wieder die Einstellungsorte der eingebrachten Lösung im Schlierenbild in der bekannten Versuchsanordnung beobachtet. Es wurde zunächst die Einstellung von Kaliumpermanganatlösungen verschiedener Konzentration in Zuckerlösungen verschiedenen spezifischen Gewichtes geprüft. Die Lösungen wurden wieder in das schon bestehende Ultraschallfeld mittels einer Pipette eingebracht, mit dem Ergebnis, daß jene Lösung, die leichter ist als die Zuckerlösung, in den *Druckknoten* aufwärts strömt, während die schwerere Lösung in den *Druckbäuchen* sinkt. Von besonderem Interesse war nun das Einbringen einer Kaliumpermanganatlösung von gleicher Dichte wie die Zuckerlösung. Dies führte zur gleichzeitigen Einstellung der Lösung *sowohl* in den Druckbäuchen *als auch* in den Druckknoten, somit im Abstand einer Viertel-Wellenlänge, wie die *verschiedenen* Streifen in Abb. 3.

Durch kleine Variationen der Dichte treten einmal die einen Streifen und einmal die anderen stärker hervor. Quantitative Untersuchungen ergaben, daß beim Abweichen der Dichte der eingebrachten Lösung von der der Grundlösung um



Abb. 3. „ $\lambda/4$ -Streifen“ bei gleicher Dichte der Flüssigkeiten.

1 % die beiden Streifensysteme gerade noch erkennbar sind, bei größeren Abweichungen aber nur eines. Das Auftreten dieser „ $\lambda/4$ -Streifen“ ist also ein sehr empfindliches Kennzeichen für die Dichtegleichheit der beiden Lösungen. Wird das Feld abgeschaltet, solange noch  $\lambda/4$ -Streifen vorhanden sind, so sieht man die in den Druckbäuchen gebildeten Streifen entsprechend ihres Dichteunterschiedes gegenüber der Zuckerlösung sinken, die anderen hingegen aufsteigen.

Zusammenfassend ergeben sich für Lösungen die Einstellorte nach Tabelle II.

Tabelle II

Eingebrachte kolloidale oder echte Lösung gegenüber der vom Ultraschall durchsetzten Flüssigkeit:	Einstellort
leichter	Druckknoten
schwerer	Druckbäuche
gleiche Dichte	Druckknoten und Druckbäuche

Abschließend sei noch ein Versuch angegeben, der die Einstellung von Lösungen in besonders einfacher und klarer Weise zeigt. Zur Beobachtung dient eine kleine Kammer, die auf einfache Weise hergestellt werden kann. Der Raum über einer Glasplatte wurde mit Glasplättchen auf drei Seiten so abgeschlossen, daß eine Kammer der Größe  $4 \times 4 \text{ cm}^2$  und der Höhe 1 mm entstand, die auf der vierten Seite durch eine dünne Gummimembran abgeschlossen wurde. Von hier konnte der Ultraschall zugeleitet werden. Die Zuführung des Ultraschalles erfolgte in der Weise, daß an das Tischchen, auf dem die Kammer lag, ein Gefäß mit Wasser gestellt wurde, in das der



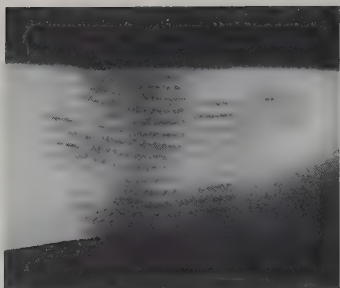


Abb. 4. Einbringen von Kaliumpermanganatlösung (dunkle Streifen) in Wasser.

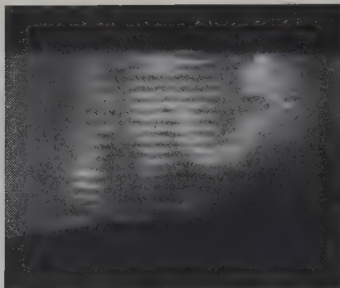


Abb. 5. Einbringen von Wasser (helle Streifen) in Kaliumpermanganatlösung.

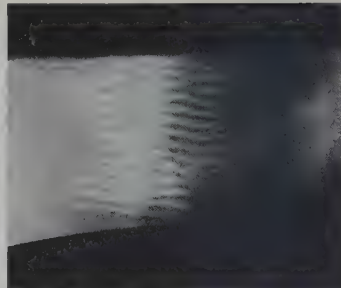


Abb. 6. Streifenbildung durch Einbringen von Wasser (links) und konzentrierter Kaliumpermanganatlösung (rechts) in Kaliumpermanganatlösung mäßiger Konzentration.

Schallkopf zwecks Kühlung zur Hälfte eintauchte; die Kammer wurde mit der Membran an den Schallkopf angeschoben und zur besseren Schallübertragung wurde zwischen den Schallkopf und die Gummimembran ein Wassertropfen gebracht. (Diese Kammer eignet sich auch für Ultraschallversuche mit gleichzeitiger Beobachtung im Mikroskop.)

Füllt man die Kammer mit Wasser, erzeugt dann eine stehende Ultraschallwelle und gibt einen Tropfen Kaliumpermanganatlösung darauf, so bilden sich rote Streifen (Abb. 4); erzeugt man jedoch das Schallfeld in einer Kaliumpermanganatlösung und gibt einen Wassertropfen darauf, so sieht man helle Streifen auf rotem Grunde (Abb. 5). Beide Streifensysteme nebeneinander

bilden sich, wenn man in eine mäßig konzentrierte Kaliumpermanganatlösung von der einen Seite eine konzentrierte Lösung und von der anderen Seite Wasser tropft. Hierbei entstehen, wie Abb. 6 zeigt, auf der einen Seite (rechts in der Abbildung) dunkle Streifen auf mäßig dunklem Grunde und auf der anderen Seite helle Streifen auf demselben Grunde. Die Streifen sind dabei um eine Viertel-Wellenlänge gegeneinander verschoben.

(Eingegangen am 2. September 1954.)

#### Schrifttum

- [1] und [2] zitiert nach BERGMANN, L., *Der Ultraschall*. S. Hirzel Verlag, Stuttgart/Zürich 1949.
- [3] MARINESCO, *Chimie et Ind.* **55** [1946], 87.
- [4] SÖLLNER, K. und BONDY, C., *Trans. Faraday Soc.* **32** [1936], 616.

## ÉTUDE STATISTIQUE DE LA SENSIBILITÉ AUDITIVE DIFFÉRENTIELLE D'INTENSITÉ

par R. CHOCHOLLE

Groupe de Recherches de Physiologie des Sensations, Laboratoire de Neurophysiologie du Collège de France

### Sommaire

Les courbes de réponse à la variation d'intensité ont été étudiées à partir de divers niveaux et à trois fréquences. Ces courbes, de forme sigmoïde, ont une pente raide; elles sont d'autant plus redressées que l'intensité est plus élevée; aux fortes intensités, elles deviennent asymétriques. Les seuils différentiels semblent indépendants de la fréquence; par contre, ils varient avec l'intensité, comme on le sait déjà.

### Zusammenfassung

Die Hörempfindlichkeit für Intensitätsunterschiede wurde für verschiedene Bezugspegel bei drei Frequenzen untersucht. Die Kurven haben die Form einer Sigmoid und verlaufen sehr steil, und zwar um so steiler, je höher die Intensität ist. Bei sehr großen Intensitäten werden sie unsymmetrisch. Die Unterschiedsschwellen scheinen unabhängig von der Frequenz zu sein, ändern sich aber, wie schon bekannt war, mit der Intensität.

### Summary

Response curves of the ear to intensity variation were studied, relatively to different intensity levels, at three frequencies. These curves, of sigmoid form, exhibit a steep slope; the louder the tone, the steeper the slope; at high intensities, they are asymmetrical. Differential thresholds seem not to depend on frequency, but on the other hand, they vary with intensity.

### 1. Introduction

Les essais faits antérieurement sur les seuils auditifs absolus m'avaient montré, entre autres résultats [1], [2], que les fluctuations des valeurs liminaires sont faibles, et, d'autre part, que les courbes cumulatives de la fréquence des réponses affirmatives en fonction de l'intensité du stimulus (plus couramment appelées *courbes de réponse*) ont une allure sigmoïde fortement redressée.

J'ai repris une étude statistique analogue sur les seuils auditifs différentiels d'intensité; j'ai étudié, par comparaison, la répartition du pourcentage de réponses affirmatives en fonction de l'amplitude de la variation d'intensité, et ceci à différents niveaux et différentes fréquences.

### 2. Technique des mesures

#### a) Appareillage

La Fig. 1 donne un schéma du montage utilisé. Les lignes étaient asymétriques et les impédances correctement adaptées, dans un sens comme dans l'autre; l'écouteur était un écouteur électrodynamique.

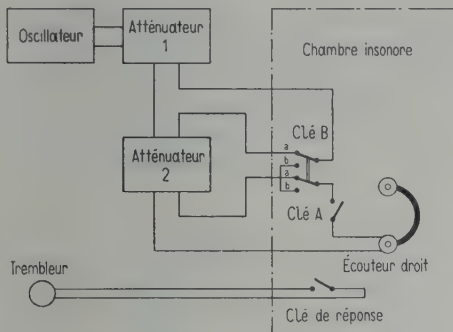


Fig. 1. Schéma de l'appareillage utilisé.

Une clé-inverseuse double à bascule (B), fixée près du sujet dans la chambre insonore, permettait, simultanément, de mettre pour un temps hors du circuit l'atténuateur 2, et de fermer le circuit en dehors de cet atténuateur; les déplacements de quelques gouttes de mercure dans de petits godets à vide permettaient ce passage d'un circuit à l'autre.

Normalement, l'inverseur se trouvait dans la position a; les atténuateurs 1 et 2 étaient, donc, dans le circuit; quand on appuyait sur le bouton de l'inverseur B (position b), l'atténuateur 2 était mis hors du circuit, et il en résultait, évidemment, une augmentation temporaire de l'intensité; dès qu'on relâchait le doigt, l'inverseur retournait de lui-même à sa position initiale, et l'intensité revenait ainsi à sa valeur primitive.

Cette clé-inverseuse permettait, donc, de produire des accroissements d'intensité de durée moyenne. D'autre part, au cours de l'inversion des circuits, la fermeture de l'un avait lieu très légèrement avant l'ouverture de l'autre; ainsi, malgré la brusquerie de la variation, il y avait un palier intermédiaire, d'où une réduction des transitoires. D'une façon générale, d'ailleurs, le dispositif utilisé a l'avantage de réduire considérablement les transitoires (contacts de mercure dans le vide, butées en caoutchouc mousse, etc.); c'est en raison de ce fait que ce dispositif a été utilisé de préférence à d'autres, comme de nombreux et longs essais l'ont prouvé.

Une clé ordinaire (clé A) permettait de ne fermer le circuit général sur l'écouteur que le temps de chaque essai, ceci afin de ne pas fatiguer le sujet.

L'opérateur tenait constante la somme des atténuations en décibels apportées par les deux atténuateurs dans la position a de la clé-inverseuse, quelle que soit l'atténuation apportée par l'atténuateur 2; ainsi, les différents accroissements temporaires d'intensité étaient toujours obtenus relativement à un niveau initial toujours identique. Si le niveau initial choisi était  $N$  (dB) et les accroissements d'intensité désirés  $\Delta N, \Delta N', \Delta N'', \dots$  (dB), l'atténuateur 2 était fixé à  $\Delta N, \Delta N', \Delta N'', \dots$  (dB), et l'atténuateur 1 à  $N - \Delta N, N - \Delta N', N - \Delta N'', \dots$  (dB). Le stimulus, après l'inversion du circuit, devenait, donc,  $N + \Delta N, N + \Delta N', N + \Delta N'', \dots$  (dB).

Ce montage a l'avantage d'éviter tout circuit secondaire dans les réseaux d'affaiblissement des atténuateurs (ce qui se produirait si on ne mettait pas entièrement hors du circuit l'atténuateur 2); et on peut être certain de la précision des variations introduites (à l'inverse d'un montage par substitution).

Le sujet avait à sa disposition une clé de réponse insérée sur le circuit d'un trembleur situé à l'extérieur de la chambre insonore.

#### b) Méthode des mesures

La méthode des stimuli constants a été employée dans ces mesures; mais, comme dans toutes les expériences antérieures, elle avait été modifiée de façon que le sujet collabore activement aux essais [1], [2].

Un signal lumineux discret prévenait le sujet d'avoir à faire trois essais successifs. Dès qu'il se sentait prêt, il appuyait sur le bouton de la clé A, et, après un temps d'au moins une seconde, il appuyait sur le bouton de la clé-inverseuse B, tout en maintenant le contact sur le bouton de la clé A (cette manœuvre était facilitée par la posi-



tion des deux clés: étant fixées côte à côte, on pouvait appuyer simultanément sur l'une avec l'index, et sur l'autre avec le pouce ou le majeur de la même main); au bout d'une seconde au moins, le sujet relâchait les deux clés. Ainsi, après être parti du silence, il avait entendu d'abord le son au niveau initial  $N$  pendant un temps suffisant, puis, sans aucun intervalle, le même son à un niveau  $N + \Delta N$  pendant un temps suffisant, lui aussi; enfin, il retournait au silence. Ce premier essai était suivi d'un repos de quelques secondes, puis d'un nouvel essai, et, avec le même processus, d'un troisième.

Quand le sujet avait terminé les trois essais demandés, il indiquait au moyen d'un signal convenu le nombre d'essais au cours desquels il avait perçu une variation d'intensité.

L'opérateur modifiait ensuite la valeur de l'accroissement  $\Delta N$ , tout en maintenant constant le niveau initial  $N$  comme il a été dit antérieurement; le sujet faisait trois nouveaux essais, et ainsi de suite.

Il était recommandé au sujet de laisser durer le son suffisamment longtemps, aussi bien avant qu'après avoir appuyé sur la clé-inverseuse B; on lui demandait aussi de ne s'attacher qu'à l'aspect intensité du stimulus avant et après l'entrée en action de la clé B, et ceci d'une façon globale, sous forme d'une véritable comparaison, en évitant soigneusement de prêter attention à ce qu'il pourrait ressentir au moment où il appuie sur la clé B.

Les essais étaient faits en suites croissantes et décroissantes alternées; cette méthode permet de compenser les sous-estimations et les surestimations provenant du sens des essais. Les séries étaient elles-mêmes fractionnées, de façon à ne pas être trop longues: on commençait par une suite décroissante de variations  $\Delta N$  d'intensité à partir d'un même niveau initial  $N$ , suivie d'une suite croissante aux mêmes valeurs; les bonds étaient de 0,3 en 0,3 dB; cette demi-série était suivie immédiatement d'une autre demi-série identique à la précédente, avec la seule différence que tous les accroissements  $\Delta N$  testés étaient supérieurs de 0,15 dB aux précédents. Ainsi, au total, par rapport à un même niveau initial  $N$ , les divers accroissements testés différaient entre eux de 0,15 dB.

Tous les trois ou quatre accroissements d'intensité testés, on présentait au sujet un accroissement de 10 dB plus grand, à la même fréquence et à partir du même niveau initial  $N$ .

A chaque niveau initial utilisé, les accroissements  $\Delta N$  testés étaient répartis de part et d'autre de la valeur du seuil différentiel; 12 à 14

valeurs furent testées aux forts niveaux d'intensité, et 16 à 18 valeurs aux faibles niveaux. A chaque valeur testée, 100 essais furent effectués. Chaque série d'essais durait 15 à 30 minutes; elle était suivie d'un repos de 15 à 20 minutes.

Avant chaque série, on procédait à une détermination rapide du seuil absolu à la fréquence utilisée, par la méthode des stimuli constants. Cette détermination était rendue nécessaire pour établir le niveau initial: la valeur de ce niveau,  $N$ , était, en effet, fixée par rapport au seuil absolu; de cette façon, les variations du seuil absolu d'une série à l'autre n'intervenaient pas dans les résultats. Les niveaux initiaux  $N$  utilisés furent: 1, 3, 6, 10 dB au-dessus du seuil, et, au-delà de cette valeur, tous les niveaux possibles de 10 en 10 dB. Les sujets ont travaillé à trois fréquences: 200, 1000 et 10000 Hz.

J'ai fait appel à quatre sujets bien entraînés et à un 5<sup>e</sup> sujet peu entraîné. Les quatre premiers sujets ont travaillé plusieurs heures par jour, pendant de longs mois.

### 3. Résultats

Les figures 2 à 7 résument les résultats pour deux des sujets, à trois fréquences.

Les abscisses sont les accroissements d'intensité  $\Delta N$  en décibels, à partir du niveau initial  $N$  indiqué pour chaque courbe, et les ordonnées, les pourcentages de réponses affirmatives.

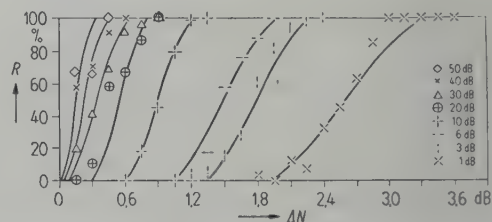


Fig. 2. Pourcentage de réponses affirmatives en fonction des accroissements d'intensité  $\Delta N$ , évalués en décibels; chaque courbe correspond à un niveau  $N$  d'intensité initialement à la variation; les niveaux auxquels chaque courbe a été obtenue sont indiqués à droite. Sujet I à 200 Hz, en écoute monaurale.

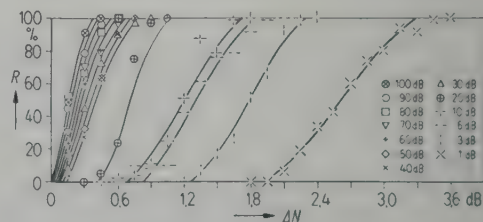


Fig. 3. Mêmes explications que pour la Fig. 2; Sujet I à 1000 Hz.

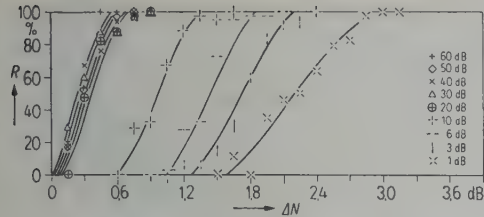


Fig. 4. Mêmes explications que pour la Fig. 2; Sujet I à 10 000 Hz.

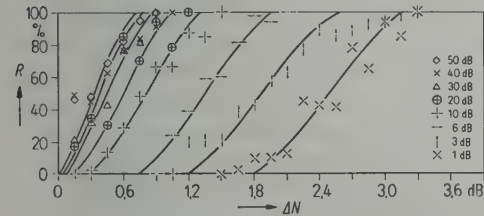


Fig. 5. Mêmes explications que pour la Fig. 2; Sujet II à 200 Hz.

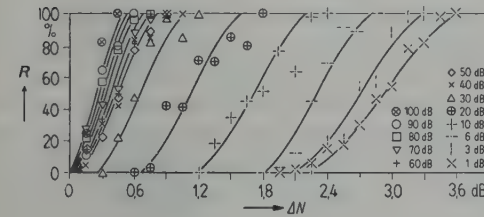


Fig. 6. Mêmes explications que pour la Fig. 2; Sujet II à 1000 Hz.

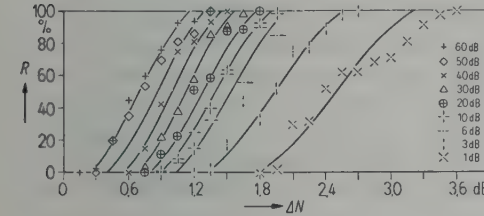


Fig. 7. Mêmes explications que pour la Fig. 2; Sujet II à 10 000 Hz.

La forme des courbes de réponse a été déduite de celles obtenues dans une étude antérieure sur les seuils absolus monauraux et binauraux [1], [2].

En effet, la même forme de courbes s'applique exactement aux essais faits aux niveaux initiaux  $N$  juxtaliminaires; aux niveaux initiaux  $N$  plus intenses, il suffit, semble-t-il, de modifier la pente, tout en conservant l'allure générale, pour avoir des courbes convenables; il suffit de choisir judicieusement le rapport de transformation.

Aux intensités élevées cependant, les courbes de réponse sont nettement dissymétriques.

4. Discussion

a) Forme des courbes de réponse

Ainsi qu'il vient d'être dit, la forme représentative des courbes de réponse des seuils différentiels en dB aux niveaux initiaux  $N$  juxtaliminaires est en tous points la même que celle des seuils absolus; ces deux séries de courbes sont superposables, pour un même sujet. Ceci est d'autant plus évident dans mes expériences que des sujets furent communs aux séries d'essais sur les seuils absolus et les seuils différentiels.

Aux intensités plus élevées, la forme générale subsiste; seule, la pente change.

Ainsi, il n'y a pas de discontinuité entre sensibilité absolue et sensibilité différentielle. On peut, donc, dire que la sensibilité absolue n'est qu'un cas particulier de la sensibilité différentielle, dans lequel le stimulus au niveau initial  $N$  est le silence,  $N$  étant, alors, au plus égal à 0; on retrouve ainsi ce que j'avais déjà montré dans une étude antérieure sur les temps de réaction [3].

Dans aucun cas, les points ne peuvent être joints par une droite, comme l'avaient fait divers auteurs: STEVENS, MORGAN et VOLKMANN [4], [5], VON BÉKÉSY [6], à partir de trop peu de points, il est vrai (trois ou quatre points, le plus souvent).

La forme sigmoïde des courbes de réponse s'oppose formellement à l'hypothèse émise par ces auteurs; d'après eux, il existerait une échelle de quanta nerveux, de neuroquanta; le déclenchement de  $N-1$ ,  $N$ ,  $N+1$ , ..., neuroquanta, à un certain niveau du stimulus, dépendrait du niveau atteint par un processus qui varierait plus ou moins dans le temps; mais si les chances d'apparition sont égales pour tous les neuroquanta  $N-1$ ,  $N$ ,  $N+1$ , ..., la courbe de réponse devrait être rectilinéaire. Or, ceci ne se vérifie pas. D'autre part, il devrait résulter de cela que, pour passer d'une extrémité de la courbe à l'autre extrémité, on devrait être obligé de doubler la variation d'intensité; or, ceci ne se vérifie pas non plus.

Les résultats précédents sont en accord, par contre, avec ceux d'autres auteurs [7], [8].

b) Forme asymétrique des courbes de réponse

Aux niveaux élevés d'intensité, la forme des courbes de réponse devient nettement asymétrique, et cela d'autant plus que le niveau est plus élevé. Cette asymétrie est encore plus nette si on traduit les accroissements d'intensité en valeurs absolues. Ceci est en accord, d'ailleurs, avec les résultats de MONTGOMERY [7].

Ce fait ne doit pas nous étonner. En effet, le seuil différentiel est très faible à ces niveaux, si



bien que l'évolution de la portion des courbes de réponse au-dessous des 50 % de réponses affirmatives ne peut plus se dérouler normalement, tandis qu'elle peut se dérouler normalement dans la moitié supérieure.

### c) Pente des courbes de réponse

La pente est très redressée; elle est, d'ailleurs, d'autant plus redressée que le niveau  $N$  auquel on fait les essais est plus élevé, comme l'avait déjà constaté MONTGOMERY [7].

Aux niveaux juxtaliminaires d'intensité (1 dB au-dessus du seuil) la pente est, comme on l'a vu, sensiblement identique à celle des courbes de réponse pour la sensibilité à l'apparition d'un stimulus sonore, pour un même sujet et à la même fréquence; il suffit de faire varier les accroissements de l'intensité  $\Delta N$  de 1,2 à 1,5 dB pour passer de 0 à 100 % de réponses affirmatives.

A des niveaux  $N$  de 10 à 20 dB au-dessus du seuil la pente est, déjà, bien plus raide: on passe, alors, de 0 à 100 % de réponses affirmatives en variant les accroissements de l'intensité de 0,5 à 0,7 dB.

Aux niveaux supérieurs à 40 dB au-dessus du seuil, la pente est encore plus raide; aux niveaux élevés, toutes les courbes de réponse évoluent dans une marge de 0,3 à 0,4 dB.

Ce redressement progressif avec le niveau  $N$  de l'intensité permet de répondre à l'objection suivante: les transitoires, bien qu'inaudibles, n'interviendraient-ils pas dans une certaine mesure? Il est bien certain que, malgré les précautions prises, on n'est pas à l'abri de transitoires; il peut encore s'en créer au niveau de l'écouteur ou de l'oreille; bien qu'inaudibles, et malgré les consignes données aux sujets, on pourrait se demander s'ils ne pourraient pas, cependant, jouer un rôle. Mais, s'il en était ainsi, toutes les courbes de réponse à l'accroissement d'intensité ne seraient, alors, que des courbes de réponse à l'apparition des transitoires, c'est-à-dire à l'apparition d'un stimulus sonore; et toutes les courbes de réponse devraient avoir la même pente, celle des courbes obtenues pour les seuils absolus [1], [2], celle encore des courbes de réponse obtenues aux niveaux juxtaliminaires. Or, il n'en est rien, même aux niveaux  $N$  d'intensité où, pourtant, les chances d'avoir des transitoires sont beaucoup plus grandes.

Tout au plus, à ces niveaux élevés, peut-on se demander si la disposition, aberrante à première vue, de quelques points en dehors des courbes théoriques, n'est pas due à une certaine intervention de transitoires. A ces niveaux élevés, en effet, dans la partie supérieure des courbes de

réponse, on voit des points s'éloigner progressivement des courbes théoriques; or, plus la variation introduite est grande, plus importants doivent être les transitoires. Mais, même s'il en était ainsi, l'intervention des transitoires dans les résultats serait très limitée, puisqu'elle ne deviendrait sensible qu'à l'extrémité supérieure des courbes de réponse.

Quelle est la raison de cette forme sigmoïde des courbes de réponse? Ces courbes rappellent les courbes de répartition statistique: répartition de Gauss, répartition de Poisson reposant sur un grand nombre d'événements. Existe-t-il des éléments qui permettraient une telle interprétation? Evidemment, il pourrait y avoir des fluctuations dans le temps à différents niveaux, que ce soit dans le stimulus, au niveau des éléments sensoriels, dans les voies nerveuses ou dans les centres [1], [2]. Il est impossible de répondre positivement ou négativement à la question posée. Cependant, on ne voit pas très bien comment on pourrait expliquer, dans ce cas, pourquoi il est impossible de tracer une courbe théorique de répartition statistique qui puisse s'accorder exactement avec les points expérimentaux; même dans les meilleurs des cas, si on arrive à une coïncidence excellente sur une bonne partie du parcours, des divergences nettes, souvent importantes, apparaissent toujours aux extrémités des courbes.

### d) Variation des seuils différentiels avec l'intensité

J'ai pris comme valeurs des seuils différentiels (SD) d'intensité aux divers niveaux  $N$  les accroissements d'intensité  $\Delta N$  qui permettent d'avoir 50 % de réponses affirmatives. Les figures 8 à 10 résument les résultats; ces courbes montrent les variations des seuils différentiels SD, évalués en décibels, en fonction du niveau  $N$  de l'intensité. On retrouve ce qu'on savait déjà, à savoir la décroissance progressive des seuils

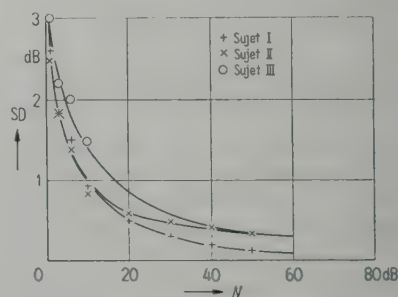


Fig. 8. Variation des seuils différentiels SD, évalués en décibels, en fonction du niveau initial de l'intensité  $N$ , indiqué en décibels au-dessus du seuil. Résultats individuels pour plusieurs sujets, en écoute monaurale, à 200 Hz.

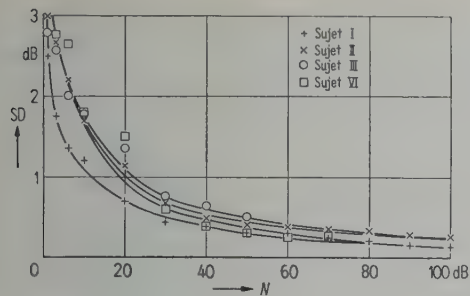


Fig. 9. Mêmes explications que pour la Fig. 8 à 1000 Hz.

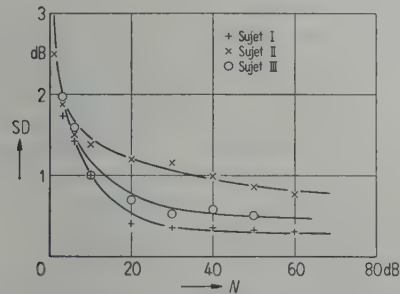


Fig. 10. Mêmes explications que pour la Fig. 8 à 10 000 Hz.

différentiels, au fur et à mesure que l'intensité croît.

Il semble même que cette décroissance continue encore, bien qu'extrêmement faiblement, aux niveaux élevés. Or, comme dans tous les phénomènes biologiques, on devrait atteindre un plateau. Ce plateau n'a encore jamais été trouvé par aucun chercheur dans l'audition. RIESZ lui-même [9], qui avait travaillé à 1000 Hz jusqu'à 90 dB, n'a pas trouvé de plateau; tout au plus, les seuils trouvés par lui semblent-ils tendre vers une valeur limite.

Doit-on conclure que les phénomènes auditifs se comporteraient autrement que tous les autres phénomènes biologiques, ce qui serait inconcevable ?

Evidemment, aux niveaux élevés, les points sont très rapprochés et, parfois même, imbriqués les uns dans les autres (voir figures 2 à 7); cependant, dans l'ensemble, ils semblent bien s'aligner sur des courbes différentes, aux différents niveaux  $N$  choisis, et ces courbes paraissent bien s'échelonner; ceci apparaît encore plus clairement quand on utilise de grandes échelles. Le tracé des courbes sur les figures tient compte de cette tendance.

Cependant, la réduction du seuil différentiel, quand croît le niveau  $N$  de l'intensité, finit par être extrêmement minime, aux niveaux élevés: 0,03 à 0,04 dB, quand on passe d'un niveau  $N$  à un autre niveau  $N'$  de 10 dB plus intense. Or, pour 100 essais, d'après la relation  $\sigma_p = \sqrt{p q / n}$

( $p$  représentant la fréquence des réponses affirmatives,  $q$  celle des réponses négatives, et  $n$  le nombre de mesures), l'erreur-type  $\sigma_p$  devrait être, en théorie, de 0,5 % pour  $p = 0,5$ ; d'après la pente des courbes auprès des 50 % de réponses affirmatives, cette erreur-type représenterait  $\pm 0,01$  à 0,02 dB, environ.

Peut-on, dans ces conditions, affirmer qu'on n'atteint jamais un plateau dans l'audition ? On ne le peut vraiment pas, d'autant plus que, comme on l'a vu, peut-être pourrait-il y avoir une intervention de transitoires, bien que certainement fort minime; d'autre part, à ces niveaux élevés, ne peut-il pas intervenir une autre modalité sensorielle, vibratoire par exemple ? est-on encore bien sûr des valeurs du stimulus avec une telle précision, à de telles intensités, et de sa qualité ? Enfin, l'effort de l'attention pour essayer de percevoir une variation est considérable à ces niveaux élevés; ceci pourrait bien se traduire dans les résultats.

Et d'ailleurs, ce plateau pourrait bien se trouver au-delà. Mon appareillage ne m'a pas permis, en effet, d'aller au-delà de 100 dB au-dessus du seuil à 1000 Hz; mais de 100 à 120 ou 130 dB, il y a une marge encore importante.

Ce qu'on peut dire de certain, en tout cas, c'est que la variation du seuil différentiel est bien minime, à partir de 40 à 50 dB au-dessus du seuil: elle est, au plus, de 0,2 à 0,4 dB, quand on passe de 40 (ou 50) dB à 100 dB au-dessus du seuil. Aux niveaux élevés de l'intensité, le seuil différentiel est de 0,15 à 0,25 dB, suivant les sujets. Je retrouve ainsi à peu près les valeurs données par RIESZ [9], mais obtenues par une autre méthode.

A un niveau  $N$  d'intensité de 20 dB au-dessus du seuil, le seuil différentiel est de 0,5 à 1,2 dB; ce n'est qu'en-deçà seulement de 10 dB au-dessus du seuil que la sensibilité différentielle devient vraiment moins bonne; aux niveaux juxtales, elle atteint 2,5 à 3 dB.

D'une façon générale, les seuils obtenus dans ce travail sont un peu plus faibles que ceux donnés par d'autres auteurs, par exemple RIESZ [9], DIMMICK et OLSON [10], MILLER [11], LÜSCHER et ZWISLOCKI [12], HARRIS [13], MONTGOMERY [7], CORSO [8].

Les différences constatées entre les résultats présents et ceux donnés dans d'autres travaux s'expliquent, probablement, par des différences dans les méthodes utilisées; DIMMICK [13], MONTGOMERY [7], l'ont, d'ailleurs, montré, en comparant les résultats obtenus avec différentes méthodes, ou en variant les consignes données aux sujets.



Les causes principales de ces différences doivent être certainement recherchées dans l'utilisation de sujets entraînés, et de statistiques de résultats sur des individus, et non sur toute une population, comme cela a été le cas dans beaucoup de ces travaux. D'autre part, dans les expériences présentes, les sujets collaboraient activement aux essais, comme on l'a vu; ils étaient, de plus, dans le meilleur état possible au moment des essais; enfin, leurs réponses étaient d'autant plus précises qu'ils ne répondaient qu'après avoir fait trois essais successifs.

Il y a, en plus, le plus souvent, des différences importantes entre la méthode de mesures utilisée ici et celles employées par d'autres auteurs. Certains ont utilisé des stimuli brefs, mais sans se préoccuper des transitoires; d'autres se sont contentés de déterminer la plus petite variation audible, le sujet indiquant quand il entend apparaître une variation, ou au contraire, quand celle-ci semble disparaître. D'autres encore ont intercalé un intervalle de silence entre la cessation du premier signal et l'apparition du deuxième (UPTON et HOLWAY, [15]); or, la durée de cet intervalle intervient.

Toutes ces dernières années d'ailleurs, la plupart des recherches entreprises sur ce sujet ont utilisé un autre type de stimulus; afin d'éviter les transitoires, les auteurs utilisèrent des signaux modulés; parmi les travaux les plus connus, on peut citer, par exemple, RIESZ [9], LÜSCHER et ZWISLOCKI [12]. A un rythme optimum de modulation, on recherche la dénivellation qui permet d'avoir encore une sensation de fluctuation, ou la dénivellation à laquelle cette sensation commence à apparaître. C'est, en plus, une méthode qui demande un minimum au sujet, elle est facile à utiliser; c'est, d'ailleurs, la méthode employée en audiométrie pour détecter la présence éventuelle d'un recrutement bilatéral dans certains types de surdités (méthode dite du test de LÜSCHER). Mais est-on bien sûr de mesurer, par cette méthode, véritablement un seuil différentiel? On mesure bien un seuil de sensation papillotante; mais quelle est la relation entre le seuil différentiel et le seuil de sensation papillotante, à supposer même qu'il y en ait une, comme on a trop tendance à l'admettre a priori?

Il ne faut pas oublier, en effet, que ce dont nous prenons connaissance dans nos expériences, ce ne sont pas les effets au niveau de la cochlée; c'est au contraire, le plus souvent, le résultat de jugements de la part des sujets sur ce qu'ils ont perçu ou cru percevoir. Les sujets jugent d'après ce qu'a reçu le cortex, après toutes les pertes, les

intégrations, les associations, qui ont pu se produire à tous les niveaux de la voie sensorielle.

Or, les jugements ne sont pas les mêmes quand il faut juger de l'existence ou non d'un papillotement, ou de la présence ou non d'une variation; d'autre part, les indices sur lesquels repose le jugement auprès du seuil différentiel peuvent différer dans l'un et dans l'autre cas; on sait qu'un stimulus modulé entraîne une rythmicité à une cadence identique au niveau de certains éléments corticaux; ceci ne pourrait-il pas devenir l'indice sur lequel s'appuie notre jugement, dans le cas d'un stimulus modulé?

Le seuil différentiel relatif, évalué en pression acoustique, passe de 40 % environ aux niveaux juxtaliminaires à 10 ou 15 % à 20 dB, et n'est plus que de 2 à 3 % aux niveaux élevés; traduit en puissance acoustique, le seuil différentiel relatif passe, dans les mêmes conditions, de 100 à 5 %. Ces chiffres peuvent être traduits en valeurs absolues. En valeurs absolues de pression acoustique, le seuil varie relativement peu jusqu'à un niveau de 20 dB au-dessus du seuil: sa valeur absolue croît seulement de deux à trois fois; mais au-delà, le seuil, évalué en valeurs absolues de pression acoustique, croît rapidement; il arrive, à un niveau de 100 dB par exemple, à correspondre à une variation de pression acoustique 2000 ou 3000 fois plus ample; traduit en valeurs absolues de pression acoustique, le seuil différentiel est des centaines de millions de fois plus ample à 100 dB qu'à 1 dB.

#### e) Les échelons différentiels d'intensité

On peut intégrer les valeurs des seuils différentiels, comme l'a fait RIESZ [15]; on obtient, alors, le nombre  $n$  d'échelons différentiels discriminables, les uns à la suite des autres, entre  $N$  et  $N'$  dB. J'ai procédé plus simplement, comme je l'avais déjà fait dans un travail antérieur [3]: il suffit d'évaluer de proche en proche le nombre d'échelons dans des intervalles limités, d'après les valeurs en décibels des seuils différentiels dans chacun de ces intervalles; cette méthode donne des résultats plus proches de la réalité, comme je l'ai constaté, en essayant de résoudre le problème inverse: connaissant les courbes reliant le nombre  $n$  d'échelons différentiels discriminables d'intensité, en déduire le seuil différentiel à un niveau  $N$  quelconque.

Le résultat final apparaît dans les courbes des figures 11 à 13.

Ces courbes sont pratiquement semblables à celles qu'avait données RIESZ. Comme les seuils différentiels sont légèrement plus faibles, il en résulte, évidemment, qu'à chaque niveau, le

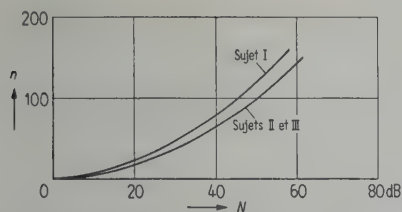


Fig. 11. Nombre  $n$  d'échelons différentiels en fonction du niveau initial  $N$  de l'intensité,  $N$  étant évalué en dB au-dessus du seuil. Résultats individuels pour plusieurs sujets, en écoute monaurale à 200 Hz.

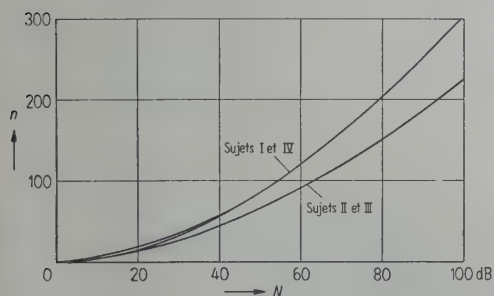


Fig. 12. Mêmes explications que pour la Fig. 11 à 1000 Hz.

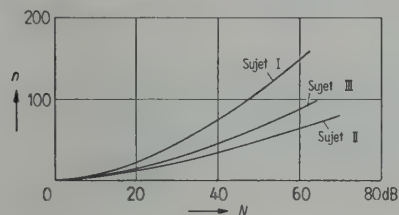


Fig. 13. Mêmes explications que pour la Fig. 11 à 10000 Hz.

nombre d'échelons différentiels est un peu plus grand sur les courbes présentées ici.

On sait que la question n'est pas encore entièrement résolue de savoir si cette échelle est une véritable échelle de sensation, si, donc, elle se confond avec ce qui serait une « échelle de sonie », ou si ces deux fonctions sont différentes l'une de l'autre.

#### f) Indépendance des seuils différentiels d'intensité d'avec la fréquence

Les seuils différentiels ne semblent pas varier avec la fréquence; à niveaux identiques d'intensité par rapport au seuil absolu, les seuils différentiels paraissent du même ordre; il y aurait, cependant, peut-être une tendance vers des valeurs légèrement plus fortes aux fréquences moyennes.

Ceci est à rapprocher de l'absence de différences dans l'amélioration du seuil en écoute binaurale par rapport à l'écoute monaurale, quelle que soit la fréquence (CHOCHOLLE [1]).

Pourtant, dans les expériences de RIESZ [9], la variation avec la fréquence paraissait nette; les seuils différentiels paraissaient notablement

plus faibles aux fréquences moyennes, surtout aux faibles niveaux d'intensité.

Mais, plus récemment, LÜSCHER et ZWISLOCKI [12] n'ont pas trouvé, eux non plus, de différences avec la fréquence, du moins aux niveaux élevés d'intensité; aux niveaux moyens, il y aurait, peut-être, une différence, mais elle serait bien minime, et, en tout cas, dans le sens indiqué par RIESZ.

Ici encore, la technique employée doit être responsable des différences. Moi-même d'ailleurs, dans des mesures faites par une autre méthode et en rapport avec d'autres expériences [3], j'avais retrouvé des résultats comparables à ceux de RIESZ. Il faut dire aussi que les moyens utilisés alors étaient plus rudimentaires et la technique moins élaborée.

#### 5. Conclusions

Cette étude systématique montre que notre sensibilité à l'accroissement de l'intensité est extrêmement fine dans le domaine auditif; de plus, si les conditions sont excellentes, on trouve une très grande précision dans les réponses, puisqu'aux niveaux élevés, il suffit de variations de 2 à 3 % dans le niveau de pression acoustique du stimulus pour passer de 0 à 100 % de réponses affirmatives.

Toutefois, la traduction des résultats en valeurs absolues montre qu'en réalité, ceci correspond à une variation fort importante en valeurs absolues (même s'il s'agit d'évaluations en variations de pression acoustique), aux niveaux élevés. Ceci pose une question sur la nature du stimulus au niveau de la cochlée.

(Reçu le 25 octobre 1954.)

#### Bibliographie

- [1] CHOCHOLLE, R., *Acustica* **4** [1954], 341...350.
- [2] CHOCHOLLE, R., *First ICA-Congress. Acustica* **4** [1953], 99...100.
- [3] CHOCHOLLE, R., *Ann. Psychol.* **45/46** [1947], 90...131.
- [4] STEVENS, S. S., MORGAN, C. T. et VOLKMAN, J., *Amer. J. Psychol.* **54** [1941], 315...335.
- [5] STEVENS, S. S. et VOLKMAN, J., *Science* **92** [1940], 583...585.
- [6] BÉKÉSY, G. v., *Ann. Phys. Lpz.* **7** [1930], 329...359.
- [7] MONTGOMERY, H. C., *J. acoust. Soc. Amer.* **7** [1935], 39...43.
- [8] CORSO, J. F., *Amer. J. Psychol.* **64** [1951], 350...368.
- [9] RIESZ, R. R., *Phys. Rev.* **31** [1928], 867...875.
- [10] DIMMICK, F. L. et OLSON, R. M., *J. acoust. Soc. Amer.* **12** [1941], 517...525.
- [11] MILLER, G. A., *J. acoust. Soc. Amer.* **19** [1947], 609...619.
- [12] LÜSCHER, E. et ZWISLOCKI, J., *Acta otolaryngol. Stockh.*, s. 78 [1948], 156...168.
- [13] HARRIS, J. D., *Amer. J. Psychol.* **63** [1950], 409...421.
- [14] DIMMICK, F. L., *Amer. J. Psychol.* **45** [1933], 463...470.
- [15] UPTON, M. et HOLWAY, A. H., *Proc. Nat. Acad. Sci.* **23** [1937], 29...32.
- [16] RIESZ, R. R., *J. acoust. Soc. Amer.* **4** [1933], 211...216.



# MEASUREMENTS OF THERMAL DIFFUSION IN $H_2$ -He MIXTURES BY USING ULTRASONICS

by A. VAN ITTERBEEK and J. NIHOUL

Instituut voor Lage Temperaturen en Technische Physica, Leuven, Belgium

## Summary

An ultrasonic interferometer has been used to measure the change of the concentration produced by thermal diffusion in  $H_2$ -He mixtures. With this method the separation degree has been measured as a function of the concentration and the temperature. From these measurements we calculated the thermal diffusion factor  $\alpha$ , thus we obtained  $\alpha \leq 0.149$ . We measured the change of the concentration as a function of time in  $H_2$ - $N_2$  mixtures by means of the velocity. We obtained a good agreement with CLARK JONES and FURRY's theory (Rev. mod. Phys. **18** [1946], 151).

## Sommaire

Un interféromètre acoustique a été utilisé pour mesurer la variation de la concentration produite par la thermodiffusion dans des mélanges  $H_2$ -He. Au moyen de cette méthode nous avons mesuré le degré de séparation en fonction de la concentration et de la température. A partir de ces mesures nous avons calculé le facteur de thermodiffusion  $\alpha$ , ainsi nous avons obtenu  $\alpha = 0,149$ . Nous avons mesuré la variation de la concentration en fonction du temps dans des mélanges  $H_2$ - $N_2$  en mesurant la vitesse du son. Les résultats obtenus sont en accord avec la théorie de CLARK JONES et FURRY (Rev. mod. Phys. **18** [1946], 151).

## Zusammenfassung

Mit einem Ultraschallinterferometer wurde die durch Thermodiffusion hervorgerufene Konzentrationsänderung in  $H_2$ -He-Gemischen gemessen. Auf diese Weise wurde das Entmischungsverhältnis als Funktion der Konzentration und der Temperatur bestimmt und daraus die thermische Diffusionskonstante  $\alpha$  zu 0,149 berechnet. Durch Messung der Schallgeschwindigkeit bestimmte man die zeitlichen Konzentrationsänderungen in  $H_2$ - $N_2$ -Gemischen. Die gewonnenen Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit der Theorie von CLARK JONES und FURRY (Rev. mod. Phys. **18** [1946], 151).

## 1. Introduction

Two years ago, one of us together with FORREZ and MARIENS [1] developed a method to measure the change of the concentration produced by thermal diffusion in gas mixtures with the use of an ultrasonic interferometer. At that time we applied the method to  $H_2$ - $N_2$  mixtures. Since then the accuracy of the method has been increased and moreover the apparatus has undergone some tests.

We have now applied the method to measure thermal diffusion in  $H_2$ -He mixtures as a function of concentration and temperature, the lowest temperature ( $T_2$ ) of the thermal diffusion apparatus being at the boiling point of liquid propane, -oxygen or -nitrogen respectively. The highest temperature  $T_1$  corresponds to room temperature. As is well known, the change of the concentration is given by the equation:

$$\Delta\gamma = k_T \ln(T_1/T_2) \quad (1)$$

with  $k_T = \alpha \gamma_1 \gamma_2$ ;  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  being the concentrations of the two components. In general it is

found that the factor  $\alpha$  is independent of temperature. In certain mixtures however a decrease of  $\alpha$  at the lowest temperatures has been found. Three years ago one of us together with DE TROYER and RIETVELD [3] found a decrease of  $\alpha$  down to liquid hydrogen temperatures. As our present method is more accurate than our earlier one we proposed to find out whether this decrease does not start already at liquid oxygen temperatures. From our measurements we calculated the thermodiffusion factor. The measurements could not be carried out down to liquid hydrogen temperatures for the reason that at those temperatures the velocity of sound becomes a function of pressure, but we hope, by adapting the method, to make it possible that the measurements can be made down to these low temperatures.

## 2. Experimental apparatus and method

The acoustical interferometer combined with the cryostat is represented in Fig. 1. It is on the same principle as that published in our earlier paper [1], to which we refer for the description.

To determine the change of the concentration, we make use of the following equation

$$W^2 = \frac{c_p^{(1)} \gamma_1 + c_p^{(2)} \gamma_2}{c_v^{(1)} \gamma_1 + c_v^{(2)} \gamma_2} \cdot \frac{R_M T}{M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2} \quad (2)$$

in which  $W$  represents the velocity of sound,  $c_p$  and  $c_v$  the specific heats,  $M_1$  and  $M_2$  the molar masses,  $R = 8.316 \times 10^7$  erg,  $T$  absolute temperature.

Our interferometer permits one to measure the length with an accuracy of  $\pm 5$  microns, so that the velocity of sound can be measured with a relative error of 0.01 %. But we hope to reach a still better accuracy in future.

Another advantage of the method as compared with the earlier ones is that now it is also possible to measure the change of the concentration as a function of time, besides the final concentration. Thus we were able to check the theory of CLARK JONES and FURRY [4] by means of our earlier measurements on the  $H_2$ - $N_2$  mixtures as a function of pressure.

The way of carrying out the measurements is as follows. The apparatus is first evacuated by means of a diffusion pump. Then the cryostat is filled with liquid oxygen or liquid nitrogen and the interferometer also is filled with hydrogen gas in order to precool the apparatus. After two hours the hydrogen is pumped away and the interferometer is filled with the mixture, which has been prepared before. The concentration is determined from the partial pressures and controlled by means of a velocity measurement in the mixture at room temperature.

The thermodiffusion-velocity measurements are started immediately after the interferometer is filled with the mixture. The change of velocity is continuously measured as a function of time. From these measurements the variation of the concentration ( $\Delta\gamma_1$ ) within the lowest part of the apparatus can be determined by means of Eq. (2). The total change of concentration  $\Delta\gamma$  is calculated by means of Eqs. (3) and (4)

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2 \quad (3)$$

with

$$\Delta\gamma_1 = \Delta\gamma_2 \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \quad (4)$$

( $\Delta\gamma_1$  is the change in the volume  $V_1$  which is at room temperature  $T_1$  and  $\Delta\gamma_2$  corresponds to the volume  $V_2$  which is at the low temperature  $T_2$ ). For the ratio  $V_1/V_2$  we found experimentally 18.5. The measurements were done at a frequency of 507.88 kc/s.

### 3. Experimental results on $H_2$ -He mixtures

Table I

$T_1$	$T_2$	$p$	Concentration	$\Delta\gamma_1$	$\Delta\gamma_2$	$\Delta\gamma$
$^{\circ}\text{K}$	$^{\circ}\text{K}$	cm	% He	%	%	%
290.1	228	26.0	21.2	0.09	0.4	0.5
290.1	228	26.0	33.8	0.06	0.8	0.9
290.1	228	26.0	48.0	0.08	1.1	1.2
290.1	228	26.0	53.4	0.07	1.0	1.1
290.1	228	26.0	74.0	0.06	0.9	1.0
291.2	90.1	27.0	11.0	0.2	1.4	1.6
291.4	90.1	28.0	32.6	0.6	3.5	4.1
291.2	90.1	28.4	34.7	0.6	3.5	4.1
291.1	90.1	26.0	54.6	0.7	3.7	4.7
290.4	90.1	27.0	67.2	0.6	3.3	3.9
288.1	90.1	28.0	82.2	0.3	2.0	2.3
290.6	77.3	26.0	13.6	0.5	2.4	2.9
290.2	77.3	25.0	34.5	0.7	3.7	4.4
290.6	77.3	26.0	52.3	0.9	4.3	5.2
287.9	77.3	27.0	56.6	0.8	4.0	4.8
289.1	77.3	27.0	58.6	0.8	4.0	4.8
288.1	77.3	26.0	81.4	0.6	2.8	3.4

The experimental results are given in Table I and graphically drawn in Fig. 2, 3 and 4 respectively. In Fig. 5 we have graphically drawn  $\Delta\gamma$  as a function of  $\ln(T_1/T_2)$

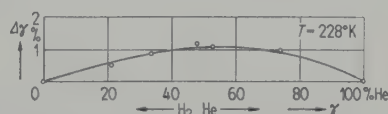


Fig. 2.  $\Delta\gamma$  as a function of  $\gamma$  at 228°K.

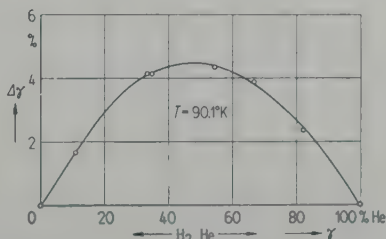
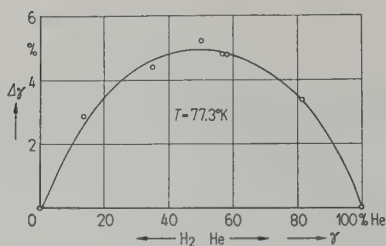
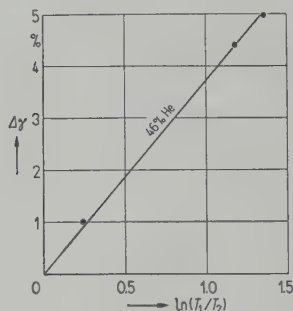


Fig. 3.  $\Delta\gamma$  as a function of  $\gamma$  at 90.1°K.

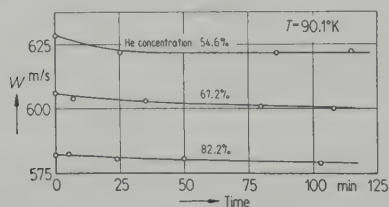
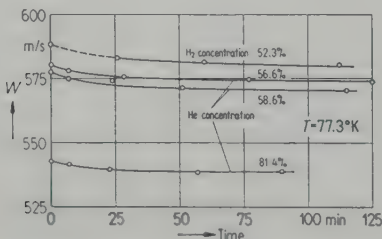


Fig. 4.  $\Delta\gamma$  as a function of  $\gamma$  at 77.3°K.Fig. 5.  $\Delta\gamma$  as a function of  $\ln(T_1/T_2)$  for  $\gamma = 46\%$  He.

We see that a straight line is obtained. From our measurements we obtain for the thermal diffusion factor,  $\alpha = 0.149$ .

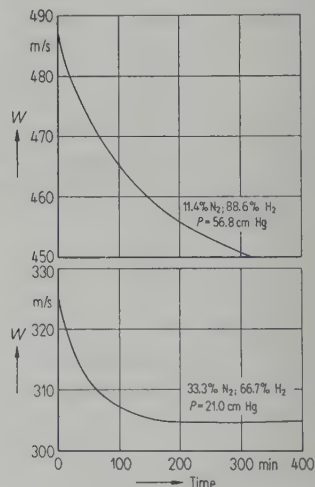
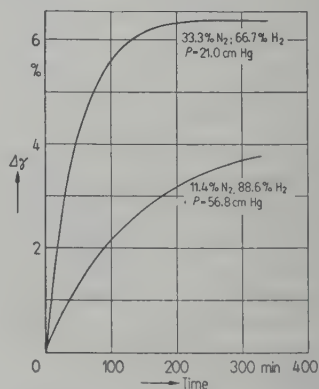
In Fig. 6 and 7 are shown graphically as an example of our measurements the change of the velocity as a function of time at 90.1 and 77.3°K respectively.

As the thermal diffusion for  $H_2$ -He mixtures is very small it is difficult to decide from the observed decrease whether this is exponential as CLARK JONES and FURRY's calculations indicate.

Fig. 6. Velocity as a function of time at 90.1°K in  $H_2$ -He mixtures.Fig. 7. Velocity as a function of time at 77.3°K in  $H_2$ -He mixtures.

In order to check this theory we reconsidered again the measurements carried out by one of us together with FORREZ and MARIENS [1] on  $H_2$ - $N_2$  mixtures, for which the thermal diffusion is much larger than for  $H_2$ -He mixtures.

From these curves we calculate the variation of concentration as a function of time (see Fig. 9).

Fig. 8. Change of the velocity  $W$  as a function of time in  $H_2$ - $N_2$  mixtures.Fig. 9. Change of concentration as a function of time in  $H_2$ - $N_2$  mixtures.

Corresponding with CLARK JONES and FURRY's theory [4] we must have

$$(\Delta\gamma)_t = (\Delta\gamma)_{t=\infty} (1 - e^{-bt})$$

with  $b = CD_{12}$ ,  $C$  being a constant depending on the length and the cross-section of the connecting tube and also on the temperatures  $T_1$  and  $T_2$ .

As the ordinary diffusion coefficient  $D_{12}$  is inversely proportional to the pressure  $p$ ,  $b$

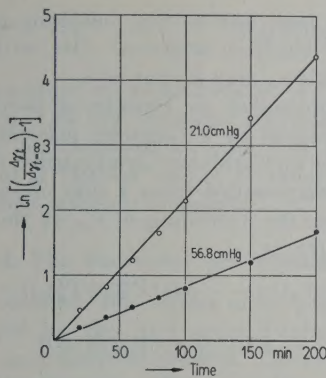


Fig. 10.

must also change in this manner. In Fig. 10 we have

$$\ln \left[ \left( \frac{\Delta \gamma_t}{\Delta \gamma_{t=\infty}} \right) - 1 \right]$$

as a function of  $t$ . We observe that straight lines are obtained. From these straight lines we calculate the values of  $b$ . Thus we obtain:

$$b_{56.8 \text{ cm}} : b_{21.0 \text{ cm}} = 81 : 218$$

which shows  $b$  to be proportional to  $p^{-1}$ .

We take the opportunity to express our sincere thanks to the Belgian Ministry of Education for his financial aid during these measurements.

(Received November 27th, 1954.)

References

[1] VAN ITTERBEEK, A, FORREZ, G. and MARIENS, P., *Physica* **19** [1953], 525.  
[2] GREW, K. E. and IBBS, T. L., *Cambridge Monographs on Physics* 1952.  
[3] DE TROYER, A., VAN ITTERBEEK, A. and RIETVELD, A., *Physica* **17** [1951], 938.  
[4] CLARK JONES, R. and FURRY, W. H., *Rev. mod. Phys.* **18** [1946], 151.

GASEOUS OSCILLATIONS  
WITHIN A PERTURBED SPHERICAL RESONATOR

by I. D. CAMPBELL\*

Imperial College, South Kensington

Summary

A perturbation method is used to investigate theoretically the modes of oscillation of a gas within an almost spherical resonator. It is shown that the pressure distribution may be represented by the pure mode together with small contributions from other "forced" modes. Under some circumstances the resonant frequencies are unperturbed, to the order of approximation adopted.

Sommaire

On utilise une méthode de perturbations pour étudier théoriquement les modes d'oscillation d'un gaz dans un résonateur presque sphérique. On montre que la distribution de la pression peut être représentée par le mode pur auquel s'ajoutent des petites contributions provenant d'autres modes «forcés». Dans certaines conditions, les fréquences de résonance ne sont pas perturbées, au degré d'approximation considéré près.

Zusammenfassung

Mit Hilfe einer Störungsmethode wurden die Schwingungsformen eines Gases in einem annähernd kugelförmigen Resonator theoretisch untersucht. Es wird gezeigt, daß die Druckverteilung durch die Verteilung einer Eigenschwingung mit kleinen Beiträgen anderer „erzwungener“ Schwingungen dargestellt werden kann. Unter gewissen Umständen sind die Resonanzfrequenzen in der Größenordnung der hier verwendeten Näherung ungestört.

1. Introduction

The modes of oscillation of a loss-free gas within a closed spherical resonator have been discussed by RAYLEIGH [1] and, more recently, by FERRIS [2]. They show that the pressure

distribution  $p$  for a gas oscillating with a pulsance  $\omega$  in a sphere of radius  $a$  may be expressed as

$$p = j_l(kr) P_l(\mu) e^{i\omega t} \tag{1}$$

where  $r$  is the radial co-ordinate,  $k$  the wave number, and  $\mu$  is  $\cos \theta$  where  $\theta$  is the polar angle. Also  $j_l$  is the spherical Bessel function and  $P_l$  the Legendre polynomial, each of order  $l$ . The

\* Scientific Officer of the Commonwealth of Australia, Department of Supply, now at Underwater Research Laboratory, Auckland, New Zealand.



resonant frequency of any mode is obtained by equating to zero the normal particle velocity at the surface of the sphere leading to the equation

$$j_l'(ka) = 0. \quad (2)$$

The solution of (2) gives a set of values of  $k$ , and hence  $\omega$ , for each order of mode,  $l$ , chosen.

An experimental investigation of these modes led the author to consider the effects of slight imperfections in the form of a resonator, nominally spherical. Since a search of the literature yielded no information the following analysis was undertaken.

## 2. General analysis

Consider a deviation from the spherical form that is symmetrical about the polar axis. Let the surface of the resonator be represented by

$$r_0 = a [1 + \varepsilon g(\theta)] \quad (3)$$

where  $r_0$  is the radial distance of the surface from the origin,  $a$  the radius of the sphere, now perturbed,  $\varepsilon$  a small dimensionless quantity and  $g(\theta)$  a function determining the perturbation.

If the usual orthogonal spherical coordinate system is set up at that point of the surface considered, it is found that the normal to the surface has the direction cosines

$$(1, -\varepsilon dg/d\theta, 0) \quad (4)$$

an expression correct to the first order in  $\varepsilon$ . Since the vector particle velocity  $\vec{v}$  of an acoustic wave is related to the pressure  $p$  by

$$\vec{v} = \frac{i}{\omega \rho} \nabla p \quad (5)$$

where  $\rho$  is the density, and the other symbols are as above, the normal particle velocity  $v_n$  at the surface of the resonator is

$$v_n = \frac{i}{\omega \rho} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{dg}{d\theta} \right) \quad (6)$$

using (4). The surface of the resonator will be assumed rigid, and hence  $v_n$  is zero.

The modes of oscillation of the gas will resemble those within a true sphere. The deviation of any actual mode from the unperturbed mode can be represented as the sum of contributions from other "forced" modes. Hence, for a mode symmetrical about the polar axis, let

$$p = j_n(s) P_n(\mu) + \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m j_m(s) P_m(\mu) \quad (7)$$

where for convenience  $s$  has been written for

$kr$ . Both here and in the following the time factor  $e^{i\omega t}$  has been neglected. Also, without loss of generality  $\alpha_n$  may be put zero.

It is convenient to consider a perturbation  $g(\theta)$  represented by a Legendre polynomial, say  $P_l(\mu)$ , since any arbitrary symmetrical deviation may be compounded from a sum of such functions. Then the vanishing of  $v_n$ , at the wall, is given by (6) as

$$j_n'(s) P_n(\mu) - \frac{\varepsilon}{s} j_n(s) P_n''(\mu) P_l'(\mu) + \varepsilon \sum \alpha_m j_m'(s) P_m(\mu) = 0 \quad (8)$$

where a dash denotes differentiation with respect to  $s$ , and a star differentiation with respect to  $\theta$ . The variable  $s$  is to be evaluated at  $r = r_0$ , i.e. at the wall. Using (3) to relate  $r_0$  to  $a$ , one obtains

$$j_n'(s_0) P_n(\mu) + \varepsilon s_0 j_n''(s_0) P_n(\mu) P_l(\mu) - \frac{\varepsilon}{s_0} j_n(s_0) P_n''(\mu) P_l'(\mu) + \varepsilon \sum \alpha_m j_m'(s_0) P_m(\mu) = 0 \quad (9)$$

where  $s_0$  is  $ka$ . The solution of this equation for  $s_0$  and  $\alpha_m$  gives respectively the resonant frequencies and the coefficients of the forced modes. One notes that if  $\varepsilon$  is zero then (9) reduces to (3) as expected.

## 3. The radial mode

The solution of (9) is somewhat involved in the general case and it is easiest to illustrate the solution with particular examples.

First consider the case of a perturbed radial mode, i.e.  $n$  is zero. Then (9) becomes

$$j_0'(s_0) + \varepsilon s_0 j_0''(s_0) P_l(\mu) + \varepsilon \sum \alpha_m j_m'(s_0) P_m(\mu) = 0. \quad (10)$$

The solution is obtained by equating to zero the coefficients of like orders of Legendre polynomial. For the zero order one has

$$j_0'(s_0) = 0 \quad (11)$$

since  $\alpha_0$  is zero by supposition. Comparing (11) with (2) it is apparent that small deviations from a spherical form of resonator leave the resonant frequencies of the radial modes unperturbed.

Similarly, equating to zero the coefficients of  $P_l(\mu)$  one obtains

$$s_0 j_0''(s_0) + \alpha_l j_l'(s_0) = 0 \quad (12)$$

where  $s_0$  is the solution of (11). Using the properties of the spherical Bessel functions, (12) may be transformed to give

$$\alpha_l = s_0 j_0(s_0) / j_l'(s_0). \quad (13)$$

It is apparent that all other  $\alpha_m$  are zero. So the pressure distribution is, cf. (7),

$$p = j_0(s) + \varepsilon s_0 \frac{j_0(s_0)}{j'_0(s_0)} j_l(s) P_l(\mu). \quad (14)$$

Hence the effect, on a radial mode, of a deviation of the shape of the resonator represented by a Legendre polynomial of order  $l$  is the introduction of a "forced" mode of order  $l$ , at the unperturbed resonant frequency.

4. The first order perturbation

Now consider the effect of a perturbation represented by the first order Legendre polynomial on a mode of order  $n$ . The resonator is now somewhat "egg-shaped". Equation (9) involves the products  $P_n P_1$  and  $P_n^* P_1^*$ . It may be shown that

$$P_n P_1 = \frac{1}{(2n+1)} [(n+1) P_{n+1} + n P_{n-1}] \quad (15)$$

and that

$$P_n^* P_1^* = -\frac{n(n+1)}{(2n+1)} [P_{n+1} - P_{n-1}]. \quad (16)$$

After substituting (15) and (16) into (9), and equating to zero the coefficient of  $P_n$  one obtains

$$j'_n(s_0) = 0 \quad (17)$$

showing that the resonant frequencies are unperturbed. By equating to zero the coefficients of  $P_{n+1}$  and  $P_{n-1}$  the equations

$$\alpha_{n+1} = \frac{(n+1)}{(2n+1)} \frac{j_n(s_0)}{j'_{n+1}(s_0)} \left[ s_0 - \frac{n(n+2)}{s_0} \right], \quad (18)$$

$$\alpha_{n-1} = \frac{n}{(2n+1)} \frac{j_n(s_0)}{j'_{n-1}(s_0)} \left[ \frac{(n+1)^2}{s_0} - s_0 \right] \quad (19)$$

result. Hence the pressure distribution is given by

$$p = j_n(s) P_n(\mu) + \varepsilon \alpha_{n+1} j_{n+1}(s) P_{n+1}(\mu) + \varepsilon \alpha_{n-1} j_{n-1}(s) P_{n-1}(\mu) \quad (20)$$

where  $\alpha_{n+1}$  and  $\alpha_{n-1}$  are as in (18) and (19). If  $n$  is chosen zero (20) checks with (14). Thus a deviation of the shape of the resonator represented by a first order Legendre polynomial introduces two adjacent forced modes and leaves the resonant frequencies unperturbed.

5. The second order perturbation

Finally consider the effect of a deviation from the spherical form represented by the second order Legendre polynomial. The shape of the resonator now somewhat resembles an hourglass.

Equation (9) in this case involves the products  $P_n P_2$  and  $P_n^* P_2^*$ . In the appendix it is shown

that such products may be expanded as series of Legendre polynomial by general theorems that state that

$$P_n P_l = \sum_{q=|n-l|}^{n+l} \beta_q P_q \quad (21)$$

and

$$P_n^* P_l^* = \sum_{q=|n-l|}^{n+l} \gamma_q P_q \quad (22)$$

where  $q$  takes even or odd values as  $(n+l)$  is even or odd. So, in the present case

$$P_n P_2 = \beta_{n+2} P_{n+2} + \beta_n P_n + \beta_{n-2} P_{n-2} \quad (23)$$

and

$$P_n^* P_2^* = \gamma_{n+2} P_{n+2} + \gamma_n P_n + \gamma_{n-2} P_{n-2}. \quad (24)$$

Here it has been assumed that  $n \geq 2$ . The case of  $n=0$  has already been considered, and when  $n=1$  the following analysis holds provided  $\beta_{-1}$  and  $\gamma_{-1}$  are made to vanish.

Eq. (9) now involves the three polynomials  $P_{n+2}$ ,  $P_n$  and  $P_{n-2}$ . The coefficient of  $P_n$  when equated to zero gives

$$j'_n(s_0) + \varepsilon \beta_n(s_0) j''_n(s_0) - \varepsilon \gamma_n \frac{j_n(s_0)}{s_0} = 0 \quad (25)$$

showing that the resonant frequencies are perturbed in this case. If the unperturbed values of a root of (25) is denoted by  $s_1$  then the incremental change  $\delta s_1$  due to the perturbation is found to be

$$\delta s_1 = -\varepsilon \left\{ \beta_n s_1 + \frac{\gamma_n}{s_1} \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{s_1^2} \right]^{-1} \right\}. \quad (26)$$

Equating to zero the coefficients of  $P_{n+2}$  one obtains

$$\alpha_{n+2} = \left\{ \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{s_1^2} \right] s_1 \beta_{n+2} + \frac{1}{s_1} \gamma_{n+2} \right\} \times \frac{j_n(s_1)}{j'_{n+2}(s_1)}. \quad (27)$$

In an analogous way an expression for  $\alpha_{n-2}$  is obtained which is (27) with  $\alpha_{n+2}$ ,  $\beta_{n+2}$ ,  $\gamma_{n+2}$ , and  $j'_{n+2}$  rewritten as  $\alpha_{n-2}$ ,  $\beta_{n-2}$ ,  $\gamma_{n-2}$ , and  $j'_{n-2}$ .

Thus the pressure distribution of a mode of order  $n$  in a spherical resonator, the shape of which is perturbed by a deviation represented by a second order Legendre polynomial is

$$p = j_n(s) P_n(\mu) + \varepsilon \alpha_{n+2} j_{n+2}(s) P_{n+2}(\mu) + \varepsilon \alpha_{n-2} j_{n-2}(s) P_{n-2}(\mu). \quad (28)$$

6. Discussion

The three examples considered above illustrate several general conclusions. If the deviation



of the shape of the resonator from the spherical form is represented by an odd Legendre polynomial then the resonant frequencies are unchanged, to the first approximation. This follows from (21) and (22) where no term  $P_n$  can occur if  $l$  is odd.  $P_n$  can only occur if  $l$  is even and then only if  $n \geq l/2$ . So if the surface of the resonator is too "corrugated," (i.e. if  $l$  is too large), the resonant frequency of the mode considered is unaffected.

Secondly, the effect of a deviation represented by a Legendre polynomial modifies the "pure" mode by introducing other modes forced to vibrate at, or near, the resonant frequency of the pure mode. If  $l$  is odd the number of these forced modes is  $(l+1)$  if  $n \geq l$  and  $(n+1)$  if  $n < l$ . If  $l$  is even then the number of forced modes is  $l$  if  $n \geq l$ ,  $n$  if  $l/2 \leq n < l$  and  $(n+1)$  if  $n < l/2$ .

The only case not considered is the trivial one of a simple expansion, represented by a zero order Legendre polynomial. The change in frequency is easily found from the roots of (2).

If the deviation  $g(\theta)$ , of equation (3), is of some general form, symmetrical about the polar axis, it is known that it may be represented by a series of Legendre polynomials. This series may be substituted in (6) and the analysis developed in a similar manner to the above. In general the resonant frequencies are perturbed and forced modes introduced.

### Appendix

An explicit expression for the coefficients  $\beta_q$  of (21) was given by ADAMS [3] and by NEUMANN in the same year. The latter's derivation is reproduced by HOBSON [4]. In the notation of the binomial coefficient

$$\beta_q = \frac{(2q+1)}{(n+l+q+1)} \times \frac{\left(\frac{n-l+q}{2}\right) \left(\frac{n+l-q}{2}\right) \left(\frac{l-n+q}{2}\right)}{\left(\frac{n+l+q}{2}\right)} \quad (29)$$

Since  $P_n^* P_l^*$  is a polynomial of order  $(n+l)$  in  $\mu$  it is apparent that this product may also be

represented as a sum of Legendre polynomials. For one has

$$P_n^* P_l^* = (1-\mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \frac{dP_l}{d\mu} \quad (30)$$

Also

$$(1-\mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} = -\frac{n(n+1)}{(2n+1)} (P_{n+1} - P_{n-1}) \quad (31)$$

and

$$\frac{dP_l}{d\mu} = (2l-1) P_{l-1} + (2l-5) P_{l-3} + \dots + \begin{cases} 3 P_1 \\ P_0 \end{cases} \quad (32)$$

as  $l$  is even or odd, cf. [4]. The combination of (30), (31) and (32) with (21) and (29) leads to the expression (22) giving the  $\gamma_q$  explicitly.

Alternatively, the approach detailed by HOBSON [4], (for  $P_n P_l$ ) may be adapted to the present case. One finds that the product  $P_n^* P_l^*$  may be written as

$$P_n^* P_l^* = a_{n+l} \{P_{n+l} + \alpha_2 P_{n+l-2} + \dots + \alpha_2 \alpha_4 P_{n+l-4} + \dots + \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2s} P_{n+l-2s} + \dots\} \quad (33)$$

down to a last term in  $P_{|n-l|}$ . Explicitly

$$a_{n+l} = -n l \binom{2n}{n} \binom{2l}{l} / \binom{2n+2l}{n+l} \quad (34)$$

and

$$\alpha_{2s} = \frac{M_{n+l-2s+2} - 2}{M_{n+l-2s}} \quad (35)$$

where

$$M_r = \frac{(r-n-l)(r+n+l+2)(r-n+l+1)(r+n-l+1)}{(2r+1)(r(r+1)-n(n+1)-l(l+1))} \quad (36)$$

### Acknowledgments

The author wishes to thank Dr. R. W. B. STEPHENS for his interest in this paper, and the Commonwealth of Australia, Department of Supply, for their permission for its publication.

(Received 1st August, 1954.)

### References

- [1] RAYLEIGH, Lord, Theory of sound; 2nd ed., Macmillan, London 1896.
- [2] FERRIS, H. G., J. acoust. Soc. Amer. **24** [1952], 57.
- [3] ADAMS, J. C., Proc. roy. Soc. **27** [1878], 63.
- [4] HOBSON, E. W., The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge University Press 1931, p. 83.